РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ по теме "АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"
Составитель: В.П.Белкин

Занятие 1. Прямая на плоскости

Пример 1.

Определить коэффициенты k, b в уравнении прямой $y = kx + b$, если прямая определена уравнением $2x - 3y = 6$. Построить прямую, определить угол наклона α этой прямой к оси OX.

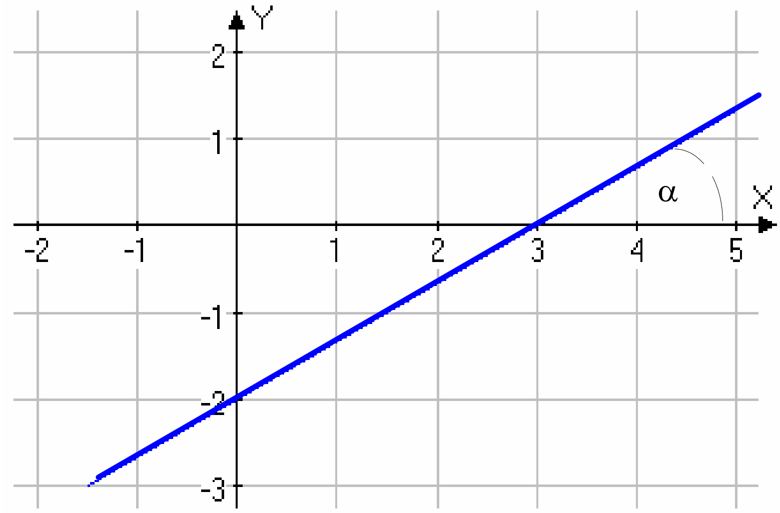
Решение. Выразим переменную y из уравнения прямой:

$2x - 3y = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 + 3y$, $y = \frac{1}{3}(2x - 6)$, $y = \frac{2}{3}x - 2$.

Получили уравнение $y = kx + b$ прямой с угловым коэффициентом.

Следовательно, угловой коэффициент $k = \frac{2}{3}$, отрезок, отсекаемый прямой на оси OY, равен $b = -2$.

Находим угол наклона α прямой: $k = tg\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{2}{3} \approx 33,7^0$.



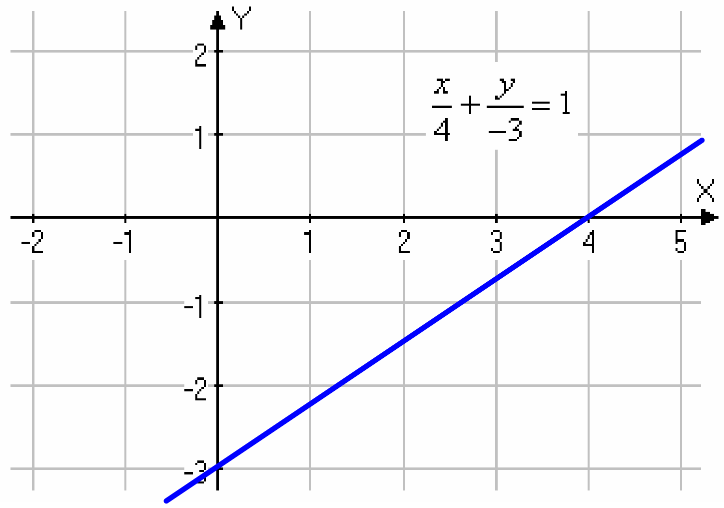
Пример 2.

Привести уравнение прямой $12 - 3x + 4y = 0$ к виду " уравнение прямой в отрезках". Построить прямую.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Преобразуем данное уравнение прямой к этому виду. Для этого в правой части уравнения следует получить единицу; разделим обе части уравнения на 12:

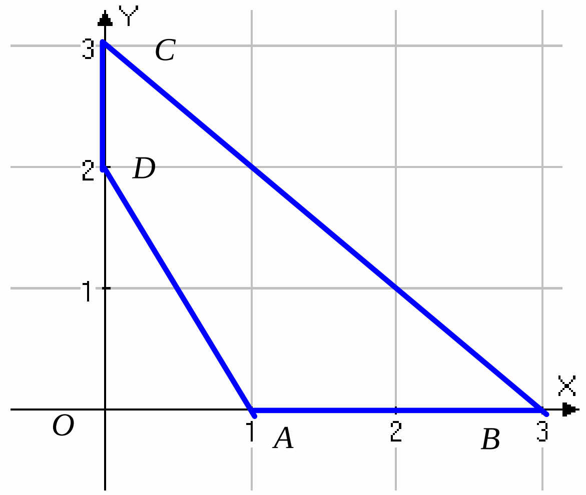
$12 - 3x + 4y = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 12$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$.

Находим отрезки $p = 4$, $q = -3$, которые прямая отсекает на координатных осях.



Пример 3.

Определить неравенствами область $ABCD$, изображенную на чертеже.



Решение. Определим каждую часть границы области уравнением:
граница AB, уравнение $y = 0$; граница CD, уравнение $x = 0$;

граница AD, уравнение $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$; граница BC, уравнение $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$.

Представим область $ABCD$ как пересечение полуплоскостей.

Очевидно, что эта область лежит в полуплоскостях $x \geq 0$, $y \geq 0$ (у которых границы CD и AB соответственно). Эти неравенства означают, что область $ABCD$ лежит выше оси абсцисс и правее оси ординат.

Граница CB задана уравнением $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, она определяет полуплоскость $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} \leq 1$, внутри которой лежит область $ABCD$.

Для проверки этого факта возьмем контрольную точку, лежащую по ту же сторону от границы, что и заданная область. Например, точка O. Подставим координаты $x=0$, $y=0$ этой точки в неравенство $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}\le 1$, получается верное числовое неравенство $0\le 1$. Поэтому контрольная точка вместе с областью лежит в указанной полуплоскости.

Определим неравенство, возникающее из уравнения $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$ границы AD

Область лежит в полуплоскости $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}\ge 1$. Для проверки подставим координаты $x=1$, $y=1$ точки, принадлежащей области $ABCD$, в уравнение и отметим знак неравенства

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1\Rightarrow\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\ge 1$$

Итак, область $ABCD$ - это множество точек $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x\ge 0;\ y\ge 0 \\ \frac{x}{1}+\frac{y}{2}\ge 1 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3}\le 1 \end{cases}$$

Пример 4.

Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $A(1;3)$, $B(2;5)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{5-3},\ y=2x+1$$

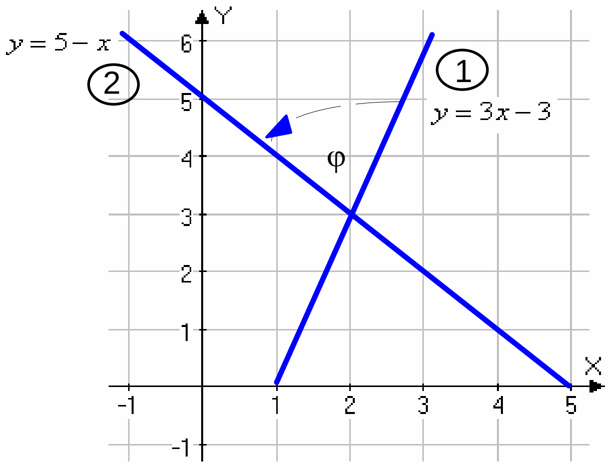
Пример 5.

Найти угол φ между прямыми $y=3x-3$, $y=5-x$.

Решение. Угловые коэффициенты прямых: $k_1=3$, $k_2=-1$.

Применим формулу угла φ между прямыми:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\ \Rightarrow tg\varphi=\frac{(-1)-3}{1+3\cdot(-1)}=2,\ \varphi=arctg2\approx 63^0.$$

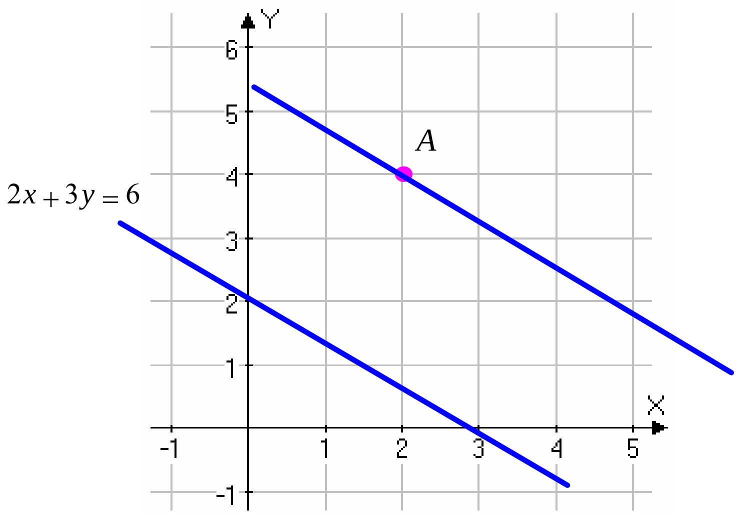


Ответ. $\varphi = arctg 2 \approx 63^0$.

Пример 6.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;4)$ и параллельной прямой $2x+3y=6$.

Решение. Построим прямые.



Вычислим угловой коэффициент прямой $2x+3y=6 \Leftrightarrow y=2-\frac{2}{3}\cdot x$, $k_1=-\frac{2}{3}$

Запишем уравнение пучка прямых: $y-y_A=k\cdot(x-x_A)$ в точке A.

Угловые коэффициенты параллельных прямых равны между собой, т.е. $k=k_1=-\frac{2}{3}$.

Далее $y-y_A=k\cdot(x-x_A) \Rightarrow y-4=-\frac{2}{3}\cdot(x-2)$, $2x+3y=16$. Ответ. $2x+3y=16$

Пример 7.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;1)$ и перпендикулярной прямой $y = 2x+1$. Найти координаты точки M пересечения этих прямых.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой: $y = 2x+1 \Rightarrow k_1 = 2$

Применим признак перпендикулярности двух прямых - произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно “минус единице“, т.е. $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$

Угловой коэффициент перпендикулярной прямой $k_2 = -\frac{1}{2}$.

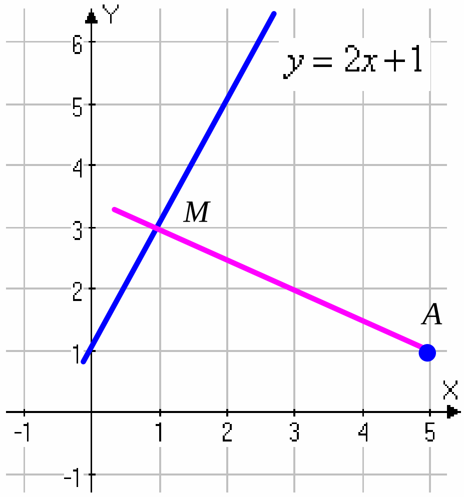
Уравнение пучка прямых $y - y_A = k_2 \cdot (x - x_A)$ в точке A:

$y - y_A = k_2 \cdot (x - x_A) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x-5)$, $y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$

Находим координаты точки пересечения двух прямых. Составим и решим систему

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x+1 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2},\ 4x+2 = -x+7,\ 5x = 5,\ x = 1,\ y = 2x+1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

Выполним чертеж



Ответ. $y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$; $M(1;3)$.

Занятие 2. Плоскость в пространстве

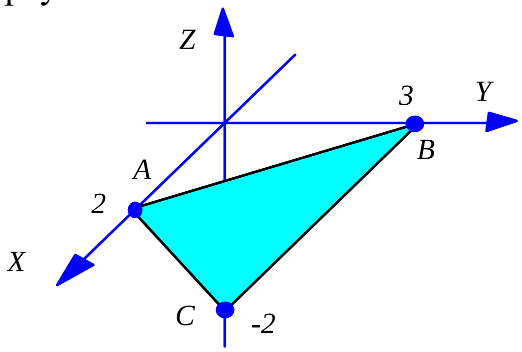
Пример 1.

Построить плоскости:

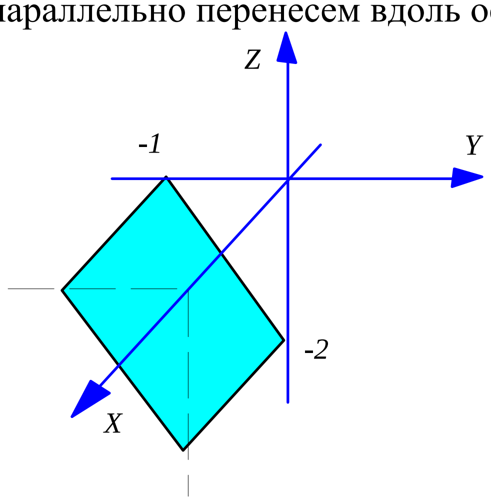
1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = 1$; 2) $y + \frac{z}{2} + 1 = 0$; 3) $3x + 6y - 2z = 3$; 4) $y = 2$.

Решение. Плоскость - неограниченная фигура. Поэтому для создания ее образа следует построить какую-то характерную ее часть, например, в виде треугольника или параллелограмма.

1) Дано уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$, в котором $p=2$, $q=3$, $r=-2$. Это отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях, зная которые можно построить часть плоскости - треугольник ABC.



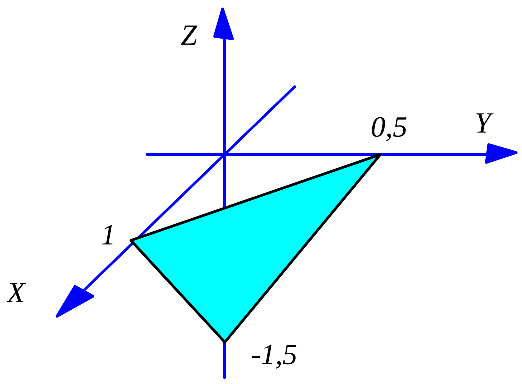
2) в уравнении $y+\frac{z}{2}+1=0$ отсутствует переменная x, поэтому плоскость параллельна оси OX. Построим прямую $y+\frac{z}{2}+1=0$ в плоскости YOZ как прямую, заданную уравнением в отрезках $\frac{y}{-1}+\frac{z}{-2}=1$. Затем эту прямую параллельно перенесем вдоль оси OX



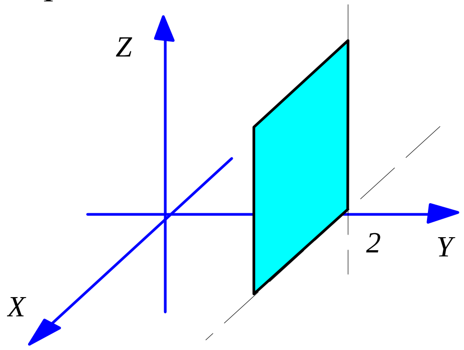
Возникает параллелограмм - как часть построенной плоскости.

3) Приводим уравнение к уравнению плоскости в отрезках:

$3x+6y-2z=3 \Leftrightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{0,5}+\frac{z}{-3/2}=1$, $p=1$, $q=0,5$, $r=-1,5$



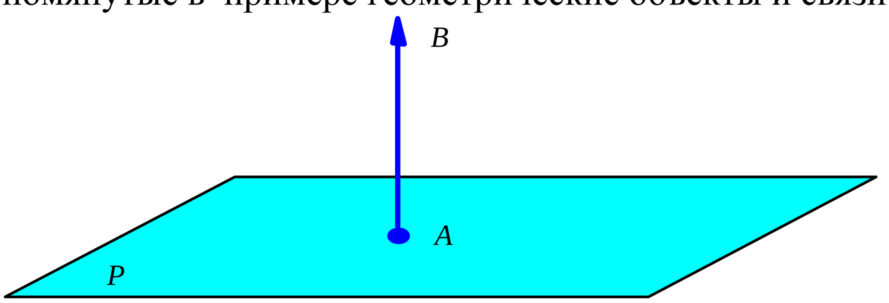
4) в уравнении $y=2$ отсутствуют переменные x и z. Поэтому эта плоскость параллельна осям OX, OZ и параллельна плоскости XOZ. Следовательно, плоскость перпендикулярна оси OY. Через точку $y=2$ на оси OY проводим оси, параллельные координатным осям, и строим в плоскости этих вспомогательных осей параллелограмм со сторонами, параллельными координатным осям.



Пример 2.

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overline{AB}$, где $A(2;1;0)$, $B(-3;1;5)$.

Решение. Выполним схематический чертеж, на котором укажем все упомянутые в примере геометрические объекты и связи между ними.



Применим каноническое уравнение плоскости

$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$,

где $\overline{n}=(a,b,c)$ - нормаль плоскости и (x_0,y_0,z_0)- точка этой плоскости.

Принимаем $(x_0,y_0,z_0)=A(2;1;0)$.

Нормаль – это любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, например, $\overline{n}=\overline{AB}=(a,b,c)=B(-3;1;5)-A(2;1;0)=(-5;0;5)$

Подставим координаты точки A и координаты нормали в каноническое уравнение плоскости

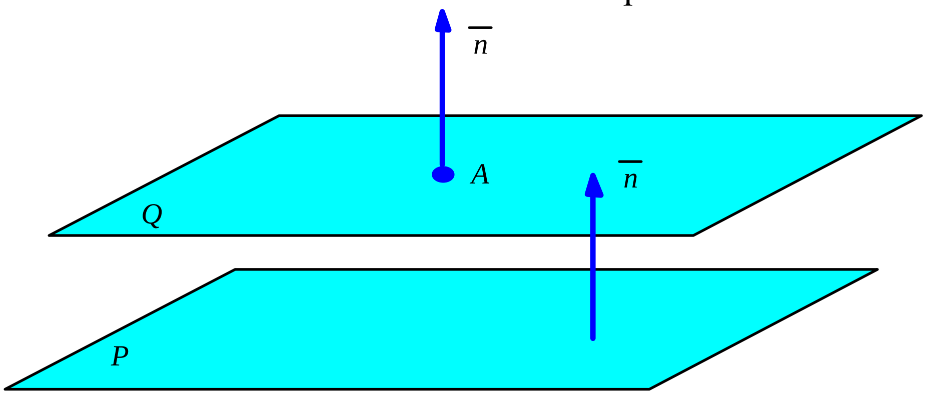
$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0 \Rightarrow (-5)\cdot(x-2)+0\cdot(y-1)+5\cdot(z-0)=0$, $x-z=2$.

Ответ. $x-z=2$.

Пример 3.

Составить уравнение плоскости, проходящей через $A(1;0;\,-1)$, параллельно плоскости $x-2\cdot y+2\cdot z=8$.

Решение. Выполним схематический чертеж.



Применим общее уравнение плоскости $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0$, где $\overline{n}=(a,b,c)$ - нормаль плоскости. Найдем нормаль из уравнения данной плоскости P:

$x-2\cdot y+2\cdot z=8 \Rightarrow \overline{n}=(a,b,c)=(1;-2;\,2)$.

Нормаль плоскости P является также нормалью параллельной плоскости Q.

Итак, можно считать, что параллельные плоскости имеют одну и ту же нормаль.

Запишем каноническое уравнение плоскости, у которой известна нормаль $\overline{n}$ и точка (x_0,y_0,z_0), принадлежащая этой плоскости.

$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0 \Rightarrow 1\cdot(x-1)+(-2)\cdot(y-0)+2\cdot(z+1)=0$,

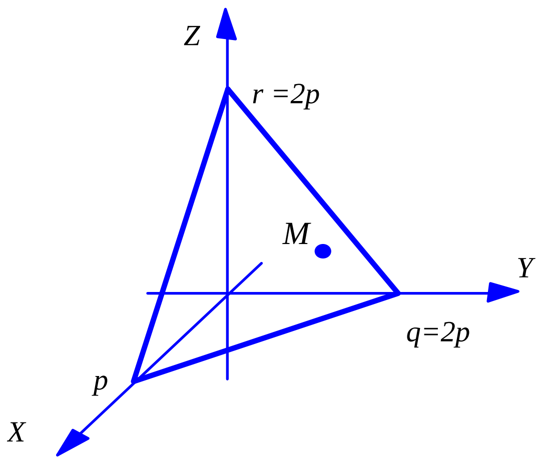
$x-2\cdot y+2\cdot z+1=0$.

Ответ. $x-2\cdot y+2\cdot z+1=0$.

Пример 4.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\,(1;-3;\,5)$ и отсекающей на осях OY, OZ вдвое большие отрезки, чем на оси OX.

Решение. Построим схематически данную плоскость. На чертеже отметим отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.



Применим уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$, в котором $q=r=2p$.

Чтобы найти значение константы p, необходимо использовать тот факт, что плоскость проходит через точку $M(1;-3;5)$.

Подставим ее координаты в уравнение плоскости

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{2p}+\frac{z}{2p}=1 \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{-3}{2p}+\frac{5}{2p}=1, \quad \frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)=1, \quad p=2, \; q=2p=4, \; r=2p=4.$$

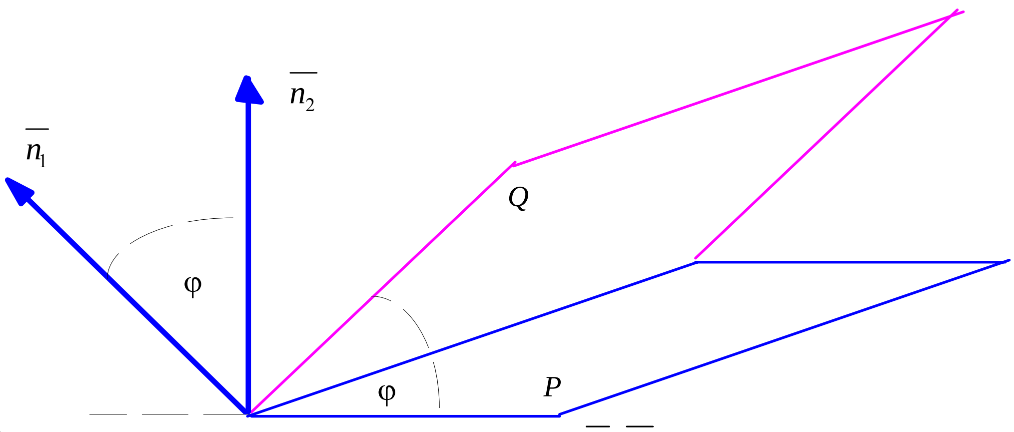
Ответ. $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$.

Пример 5.

Найти угол φ между плоскостями $y+z=0$, $2x+y-4=0$.

Решение. Угол между плоскостями равен углу φ между нормалями этих плоскостей. Находим нормали плоскостей:

$$y+z=0 \Rightarrow \overline{n_1}=(0;1;1); \qquad 2x+y-4=0 \Rightarrow \overline{n_2}=(2;1;0).$$



Вычисляем скалярное произведение $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0\cdot2+1\cdot1+1\cdot0=1$.

Модули $\left|\overline{n_1}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$; $\left|\overline{n_2}\right|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$

Косинус угла между двумя векторами $\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$

Ответ. $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\approx72^0$.

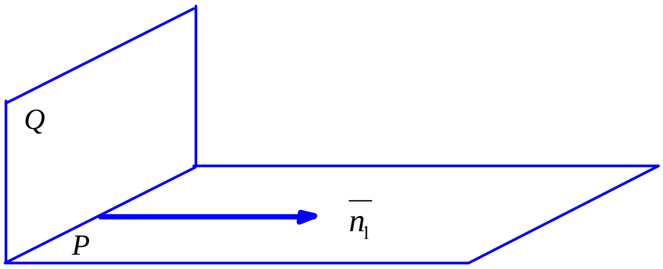
Пример 6.

Написать уравнение плоскости P, проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям $2\cdot x+3\cdot y-z+1=0$, $x+y+z-2=0$.

Решение. Обозначим данные плоскости Q, R найдем их нормали

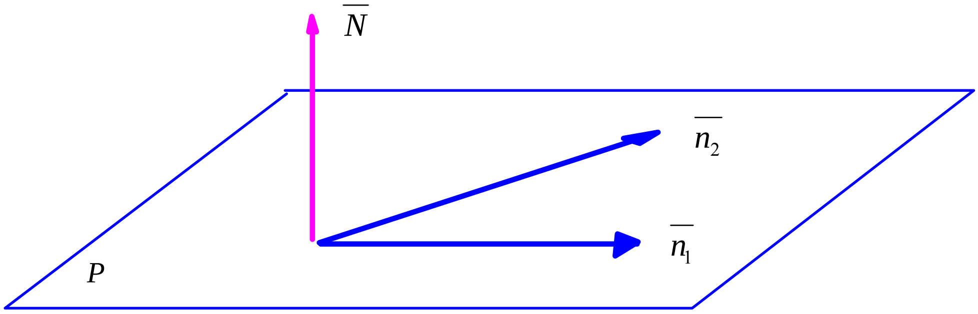
$2\cdot x+3\cdot y-z+1=0 \Rightarrow \overline{n_1}=(2;3;-1)$; $\quad x+y+z-2=0 \Rightarrow \overline{n_2}=(1;1;1)$

Изобразим две перпендикулярные плоскости P,Q



Очевидно, что нормали $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$ можно взять так, чтобы они лежали в плоскости P

Сделаем второй схематический чертеж, на котором изобразим плоскость P, содержащую два вектора $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$.



Векторное произведение $\overline{N}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}$ перпендикулярно плоскости векторов $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$, т.е. плоскости P. Поэтому в качестве нормали плоскости P можно принять векторное произведение $\overline{N}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}$. Вычислим эту нормаль

$$\overline{N}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(4;-3;-1).$$

Каноническое уравнение плоскости

$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0 \Rightarrow 4\cdot(x-0)+(-3)\cdot(y-0)+(-1)\cdot(z-0)=0$.

Ответ. $4\cdot x-3\cdot y-z=0$.

Пример 7.

Составить уравнение плоскости (ABC), проходящей через три точки $A(1;2;1)$, $B(1;-2;0)$, $C(-2;1;1)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1-1 & -2-2 & 0-1 \\ -2-1 & 1-2 & 1-1 \end{vmatrix}=0.$$

Преобразуем: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & -4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $-(x-1)+3\cdot(y-2)-12\cdot(z-1)=0$

Ответ. $x-3\cdot y+12\cdot z=7$.

Пример 8.

Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;0;2)$, $B(2;1;1)$ и параллельной оси OY.

Решение. В уравнении плоскости отсутствует переменная y, так как плоскость параллельна оси OY. Следовательно, уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;0;2)$, имеет вид

$$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0 \Rightarrow \quad a\cdot(x-x_0)+0\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$$

$$a\cdot(x-1)+c\cdot(z-2)=0$$

Подставим в это уравнение координаты второй точки $B(2;1;1)$. Получаем:

$$a\cdot(x-1)+c\cdot(z-2)=0 \Rightarrow a\cdot(2-1)+c\cdot(1-2)=0,\ a-c=0$$

Заметим, что один из неизвестных коэффициентов можно принять равным любому ненулевому числу (что повлияет только на изменение длины нормали плоскости). Например, полагаем $a=1$, тогда из равенства $a-c=0$ находим $c=1$. Подставим эти значения в уравнение искомой плоскости

$$a\cdot(x-1)+c\cdot(z-2)=0 \Rightarrow x-1+z-2=0,\ x+z=3$$

Ответ. $x+z=3$.

Пример 9.

Найти расстояние от точки $M(2;2;1)$ до плоскости $x-2y+2z=3$

Решение. Расстояние h точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0$ вычисляется по формуле

$$h=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Приводим уравнение к общему уравнению $x-2\cdot y+2\cdot z-3=0$

$$h=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow h=\frac{|1\cdot x_0+(-2)\cdot y_0+2\cdot z_0-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}};\ h=\frac{|1\cdot 2+(-2)\cdot 2+2\cdot 1-3|}{3}$$

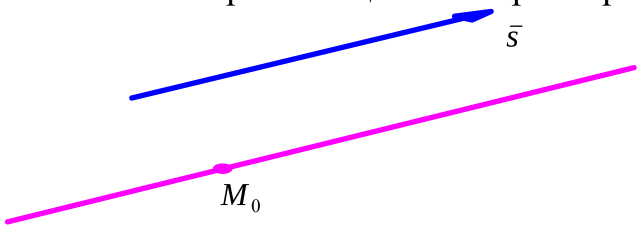
Ответ. $h=1$

Занятие 3. Прямая в пространстве

Пример 1.

Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;2;0)$ и параллельной вектору $\bar{s}=(2;0;-3)$. Сделать чертеж.

Решение. Построим схематически прямую, проходящую через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно ненулевому вектору $\bar{s}=(m;n;p)$, который называется направляющим вектором прямой.



Запишем параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = m\cdot t + x_0 \\ y = n\cdot t + y_0 \\ z = p\cdot t + z_0 \end{cases}$

В нашем случае направляющий вектор прямой равен $\bar{s}=(2;0;\,-3)$, т.е. $m=2$, $n=0$ и $p=-3$.

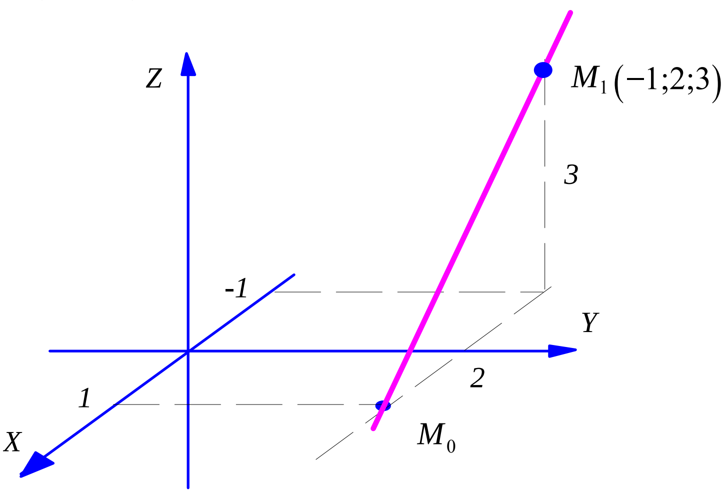
Прямая проходит через точку $M_0(1;2;0)$, поэтому $x_0=1, y_0=2\ \ z_0=0$.

Подставим значения $m=2$, $n=0$, $p=-3, x_0=1, y_0=2\ \ z_0=0$ в параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = m\cdot t + x_0 \\ y = n\cdot t + y_0 \\ z = p\cdot t + z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cdot t + 1 \\ y = 0\cdot t + 2 \\ z = -3\cdot t + 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 2\cdot t + 1 \\ y = 2 \\ z = -3\cdot t \end{cases}$$

Заметим, что прямая лежит в плоскости $y=2$, перпендикулярной оси ординат. Поэтому прямая также перпендикулярна этой оси.

Для построения прямой находим вторую точку, через которую прямая проходит. Например, при $t=-1$ получаем $x=-1$, $y=2$, $z=3$, т.е. точку $M_1(-1;2;3)$.



Пример 2.

Составить канонические уравнения прямой AB, если $A(1;\,-4;3)$, $B(2;1;3)$.

Решение. Подставим в канонические уравнения прямой проекции направляющего вектора $\bar{s} = \overline{AB} = B(2;1;3) - A(1;\,-4;3) = (1;5;0)$ и координаты $(x_0;y_0;z_0)$ точки $A(1;\,-4;3)$:

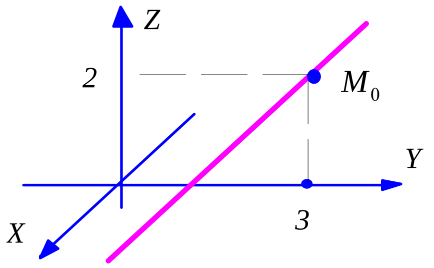
$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \;\Rightarrow\; \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{5} = \frac{z-z_0}{0},\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{0}\,.$$

Деление на нуль означает, что числитель дроби также равен нулю, т.е. прямая лежит в плоскости $z-3=0$.

Пример 3.

Построить прямые: 1) $\begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=2 \\ z=1-y \end{cases}$.

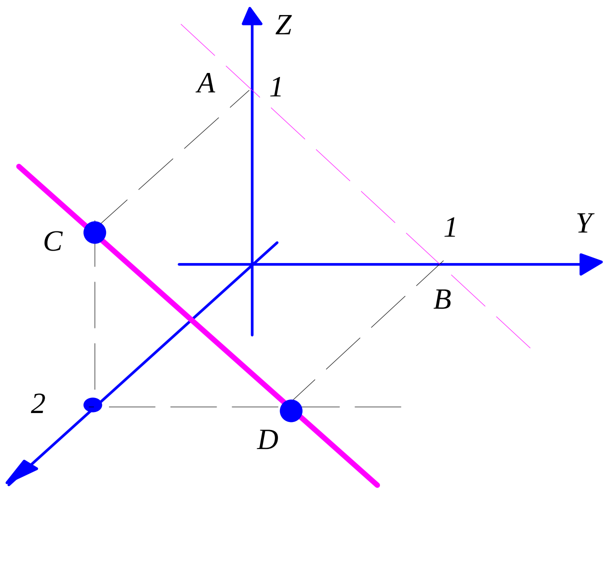
Решение. 1) прямая состоит из точек $M(x;3;2)$ и перпендикулярна осям OY, OZ; поэтому данная прямая параллельна оси абсцисс и проходит через точку $M_0(0;3;2)$, лежащую в плоскости YOZ



2) Прямая $\begin{cases} x=2 \\ z=1-y \end{cases}$ определена уравнениями в проекциях.

Прямая лежит в плоскости $x=2$ и поэтому перпендикулярна оси абсцисс.

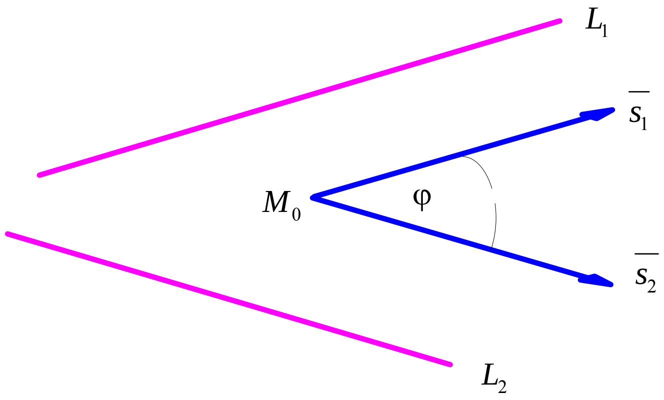
Сначала построим прямую AB, заданную уравнением $z=1-y$ в плоскости YOZ, эта прямая отсекает на осях единичные отрезки. Построенную прямую AB параллельно переносим в плоскость $x=2$ и получаем требуемую прямую CD



Пример 4.

Вычислить угол между прямыми $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, $\begin{cases} x=2z+1 \\ y=3z-5 \end{cases}$.

Решение. Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$.



Направляющий вектор первой прямой равен $\overline{s_1}=(1;2;1)$.

Вторая прямая определяется уравнениями в проекциях, у которых аппликата z является параметром и поэтому в систему уравнений следует записать тождественное равенство $z=z$.

$$\begin{cases} x=2z+1 \\ y=3z-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+1 \\ y=3z-5 \\ z=z \end{cases}$$

Направляющий вектор этой прямой $\overline{s_2}=(2;3;1)$.

Вычислим скалярное произведение $\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}=1\cdot2+2\cdot3+1\cdot1=9$;

модули $\left|\overline{s_1}\right|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$, $\left|\overline{s_2}\right|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$

Косинус угла между векторами $\cos\varphi=\frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{\left|\overline{s_1}\right|\cdot\left|\overline{s_2}\right|}=\frac{9}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$, $\varphi\approx10{,}9^0$.

Ответ. $\varphi\approx10{,}9^0$

Пример 5.

Составить канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$.

Решение. Примем одну из переменных за свободную, а остальные выразим через нее. В качестве зависимых переменных принимаем те, для которых определитель, составленный их коэффициентов, не равен нулю.

Например, z - свободная переменная:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1+z \\ x+y=3z \end{cases}.$$

Далее, из обеих частей первого уравнения вычитаем обе части второго:
$y = 1 - 2z$

Находим x из второго уравнения:
$x + y = 3z \Rightarrow x = 3z - y$, $x = 3 \cdot z - (1 - 2z)$, $x = 5 \cdot z - 1$.

Заметим, что можно применить формулы Крамера для решения системы.

Получаем уравнения прямой в проекциях $\begin{cases} x = 5 \cdot z - 1 \\ y = 1 - 2 \cdot z \end{cases}$.

Выразим переменную z. Получаем канонические уравнения прямой
$\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-1}{-2} = z$.

Ответ. $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-1}{-2} = z$.

Пример 6.

Найти след прямой $\begin{cases} x = 4 - 2 \cdot z \\ y = 1 + z \end{cases}$ на каждой координатной плоскости.

Решение. След прямой на плоскости XOY - это точка пересечения прямой с этой плоскостью.

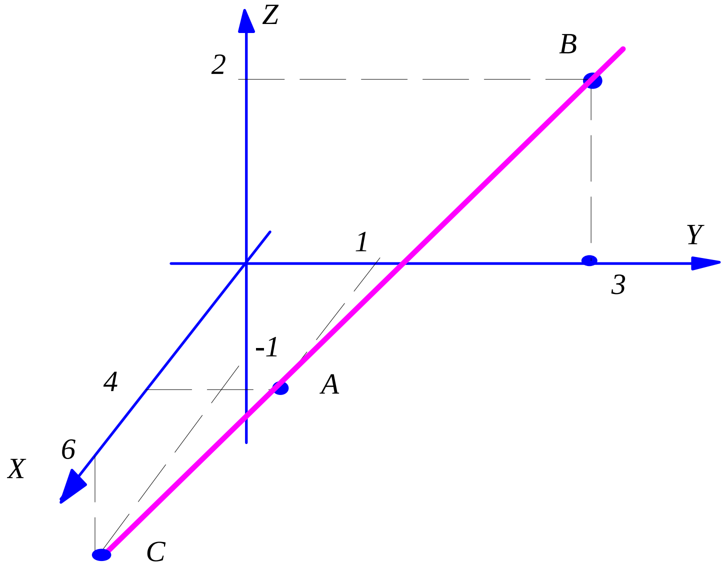
Точка пересечения A (т.е. след) прямой и плоскости XOY имеет аппликату z, равную нулю; остальные ее координаты находим из уравнений прямой, подставляя в них $z = 0$.

Отсюда:
$\begin{cases} x = 4 - 2 \cdot z \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2 \cdot 0 \\ y = 1 + 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ и $A(4; 1; 0)$

Аналогично определим след прямой на плоскостях $x = 0$, $y = 0$.

Подставим $x = 0$
$\begin{cases} x = 4 - 2 \cdot z \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 - 2 \cdot z \\ y = 1 + z \end{cases}, \begin{cases} z = 2 \\ y = 1 + z \end{cases}, \begin{cases} z = 2 \\ y = 3 \end{cases}; B(0; 3; 2)$

Подставим $y = 0$
$\begin{cases} x = 4 - 2 \cdot z \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2 \cdot z \\ 0 = 1 + z \end{cases}, \begin{cases} x = 4 - 2 \cdot z \\ z = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ z = -1 \end{cases}; C(6; 0; -1)$



Ответ. Следы: $A(4;1;0)$, $B(0;3;2)$, $C(6;0;-1)$.

Пример 7.

Найти положение B точки M , движущейся по прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+4}{-6}$ из начального положения $A(0;-1;2)$ в сторону положительных ординат со скоростью $V=14$, в момент времени $t=1$.

Решение. Определим вектор скорости $\overline{V}$ из условия ее сонаправленности направляющему вектору $\overline{s}=(2;3;-6)$.

Находим модуль вектора $|\overline{s}|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7$; единичный направляющий вектор $\overline{a}=\dfrac{1}{|\overline{s}|}\cdot\overline{s}=\dfrac{1}{7}\cdot\overline{s}$. Увеличим единичный вектор в 14 раз, т.е.

$$\overline{V}=14\cdot\frac{1}{7}\cdot\overline{s}=2\overline{s}\;\Rightarrow\;\overline{V}=(4;6;-12).$$

Составим новые параметрические уравнения движущейся точки M со скоростью $\overline{V}=(m;n;p)$ из положения A. Подставим в эти уравнения значения $m=4$, $n=6$, $p=-12$, $x_0=0$, $y_0=-1$, $z_0=2$:

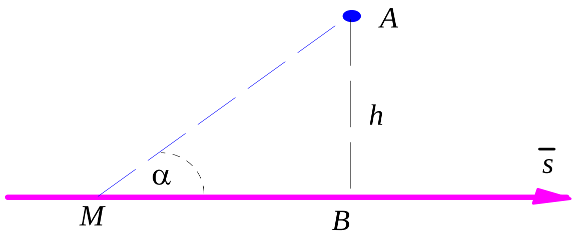
$$\begin{cases}x=m\cdot t+x_0\\ y=n\cdot t+y_0\\ z=p\cdot t+z_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\cdot t\\ y=6\cdot t-1\\ z=-12\cdot t+2\end{cases}$$

Конечное положение B получается при $t=1$.
Ответ. $B(4;5;-10)$.

Пример 8.

Найти расстояние точки $A(2;0;1)$ до прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Решение. Построим схематически прямую, проходящую через точку M и вектор $\overline{s}$.



Перпендикуляр $h = AB$ находим из прямоугольного треугольника ABM:
$h = AM \cdot \sin\alpha = \dfrac{AM \cdot |\bar{s}| \cdot \sin\alpha}{|\bar{s}|}$. Применим формулу модуля векторного произведения $|\overline{AM} \times \bar{s}| = AM \cdot |\bar{s}| \cdot \sin\alpha$.

Получаем формулу расстояния точки A до прямой: $h = \dfrac{|\overline{AM} \times \bar{s}|}{|\bar{s}|}$.

Принимаем $M(0;\,-1;\,2)$, $\bar{s} = (2;1;1)$

Вычисляем: $\overline{AM} = M(0;\,-1;\,2) - A(2;\,0;1) = (-2;-1;\,1)$, модуль $AM = \sqrt{6}$, векторное произведение

$$\overline{AM} \times \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2;\,4;0);$$

модуль $|\overline{AM} \times \bar{s}| = \sqrt{20}$.

Расстояние точки A до заданной прямой: $h = \dfrac{|\overline{AM} \times \bar{s}|}{|\bar{s}|} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{10}{3}} \approx 1{,}8$.

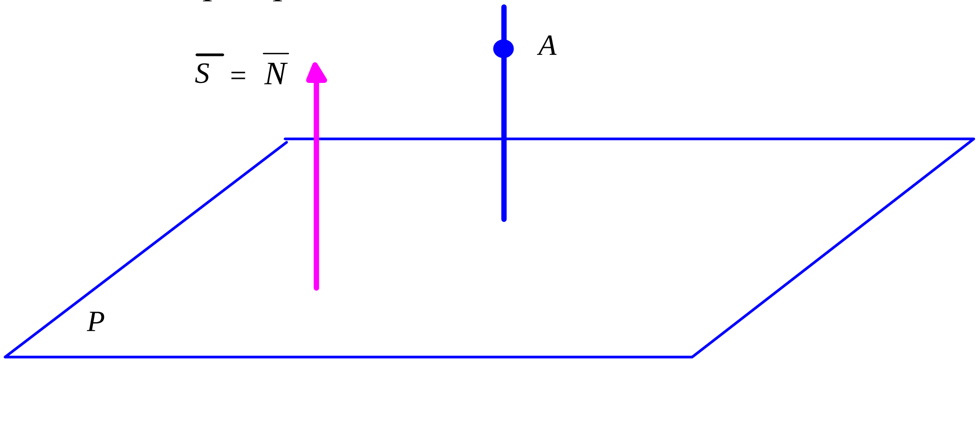
Ответ. $h = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

Занятие 4. Прямая и плоскость в пространстве

Пример 1.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,2;\,0)$, перпендикулярно плоскости $2x + y - z = 6$.

Решение. Изобразим схематически взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве



Нормаль $\overline{N}$ плоскости $2x+y-z=6$ равна $\overline{N}=(2;1;\,-1)$

Прямая, перпендикулярная плоскости, будет параллельной нормали $\overline{N}$.

Поэтому в качестве направляющего вектора $\overline{S}$ этой прямой можно принять нормаль, т.е. $\overline{S}=\overline{N}=(2;1;\,-1)$.

Применим канонические уравнения прямой в пространстве

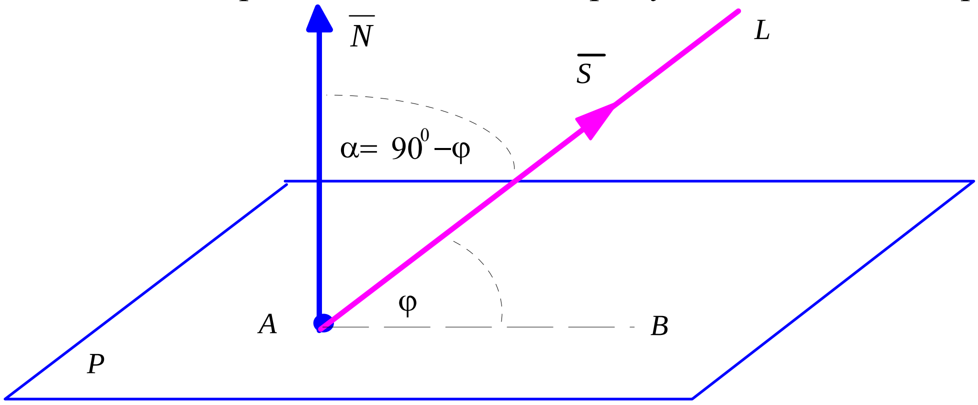
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$$

Ответ. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

Пример 2.

Найти угол между прямой $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{0}$ и плоскостью $x+y-z=0$.

Решение. Изобразим схематически прямую и плоскость в пространстве.



Угол между прямой L и плоскостью P равен углу φ между прямой и ее проекцией AB на эту плоскость.

Угол между нормалью $\overline{N}$ и направляющим вектором $\overline{S}$ равен $\alpha=90^0-\varphi$.

Находим косинус этого угла

$$\cos\left(90^0-\varphi\right)=\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|}\Leftrightarrow\sin\varphi=\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|}$$

Скалярное произведение векторов $\overline{N}=(1;1;\,-1)$, $\overline{S}=(1;2;0)$ равно

$\overline{N}\cdot\overline{S}=1\cdot1+1\cdot2-1\cdot0=3$

Модули $\left|\overline{N}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\overline{S}\right|=\sqrt{5}$

$$\sin\varphi=\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}},\quad\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}},\quad\varphi\approx51^0$$

Ответ. $\varphi\approx51^0$.

Пример 3.

Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ и плоскости $x+2y+3z-12=0$.

Решение. Точка пересечения прямой и плоскости называется следом прямой на плоскости.

Запишем параметрические уравнения прямой. Для этого введем параметр t и выразим координаты текущей точки $M(x, y, z)$ прямой через параметр:

$$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}=t \Rightarrow x=2\cdot t,\ y=t-2,\ z=2+2\cdot t.$$

Решим систему, составленную из уравнений прямой и плоскости. Для этого переменные x, y, z из параметрических уравнений прямой подставим в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} x+2y+3z-12=0 \\ x=2\cdot t \\ y=t-2 \\ z=2+2\cdot t \end{cases} \Rightarrow 2\cdot t+2\cdot(t-2)+3\cdot(2+2\cdot t)-12=0,\ t=1$$

Подставим значение $t=1$ в уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=2\cdot t \\ y=t-2 \\ z=2+2\cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$$

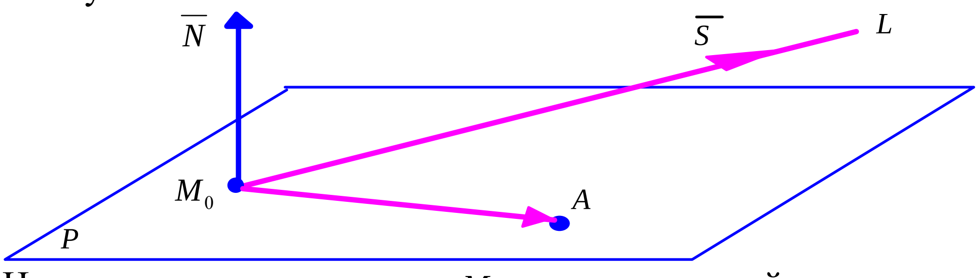
Координаты точки пересечения $A(2;-1;4)$.

Ответ. $A(2;-1;4)$.

Пример 4.

Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+8}{3}$ и точку $A(0;3;1)$.

Решение. Изобразим схематически плоскость, проходящую через прямую L и точку A.



Находим координаты точки M_0, принадлежащей плоскости из канонических уравнений прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ ;\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+8}{3} \Rightarrow M_0(1;\ -1;\ -8)$$

Направляющий вектор $\overline{S}=(1;2;3)$,

вектор $\overline{M_0A}=A(0;3;1)-M_0(1;\ -1;\ -8)=(-1;4;9)$

Нормаль $\overline{N}$ плоскости находим как векторное произведение $\overline{N}=\overline{M_0A}\times\overline{S}$.

Векторное произведение–это вектор, перпендикулярный векторам $\overline{M_0A},\ \overline{S}$.

Поэтому вектор $\overline{N}$ перпендикулярен плоскости

Вычислим координаты нормали плоскости:

$$\overline{N} = \overline{M_0A} \times \overline{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},.\ \overline{N} = (-6; 12; -6).$$

Применим каноническое уравнение плоскости

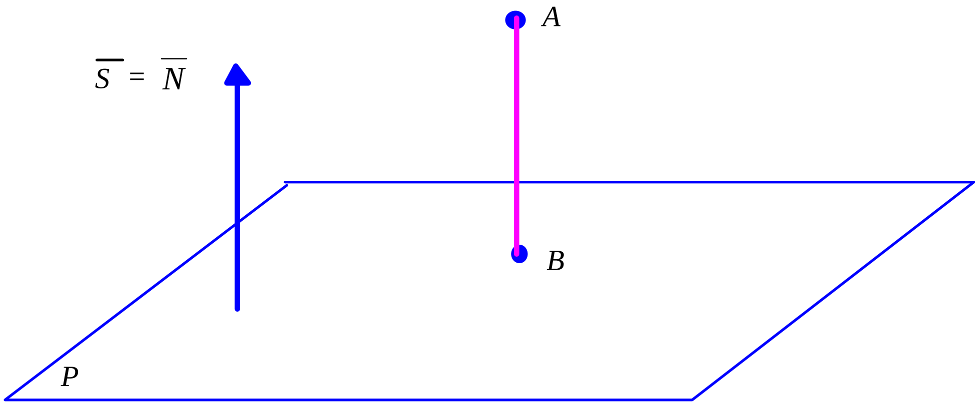
$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0 \Rightarrow (-6) \cdot (x - 0) + 12 \cdot (y - 3) + (-6) \cdot (z - 1) = 0$$

Ответ. $x - 2y + z + 5 = 0$.

Пример 5.

Найти проекцию точки $A(0; 0; 1)$ на плоскость $x + 2y + z = 7$.

Решение. Проекция точки A на плоскость - это основание B перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из точки A.



Составим уравнения прямой, проходящей через A перпендикулярно плоскости. Ее направляющий вектор $\overline{S} = \overline{N} = (1; 2; 1)$).

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = m \cdot t + x_0 \\ y = n \cdot t + y_0 \\ z = p \cdot t + z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \cdot t + 0 \\ y = 2 \cdot t + 0, \\ z = 1 \cdot t + 1 \end{cases} \begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

Находим точку пересечения B перпендикуляра AB и плоскости. Решаем систему уравнений прямой и плоскости

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ x = t \\ y = 2 \cdot t \\ z = t + 1 \end{cases} \Rightarrow t + 2 \cdot 2 \cdot t + t + 1 = 7,\quad t = 1; \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t \\ z = t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ответ. $B(1; 2; 2)$.

Пример 6.

Показать, что прямые $\begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2 \cdot z + 1 \end{cases}$, $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 4}{1} = \dfrac{z - 2}{1}$ пересекаются.

Решение. Решим совместно "переопределенную" систему, составленную из уравнений двух прямых. Например, подставим переменные x, y из первых двух уравнений в остальные:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1} \Rightarrow \frac{(z-2)-2}{3}=\frac{(2\cdot z+1)-4}{1}=\frac{z-2}{1},\ \frac{z-4}{3}=2\cdot z-3=z-2.$$

Из последней пары уравнений находим $2\cdot z-3=z-2 \Rightarrow z=1$.

При этом значении z уравнения $\frac{z-4}{3}=2\cdot z-3=z-2$ превращаются в числовые тождества.

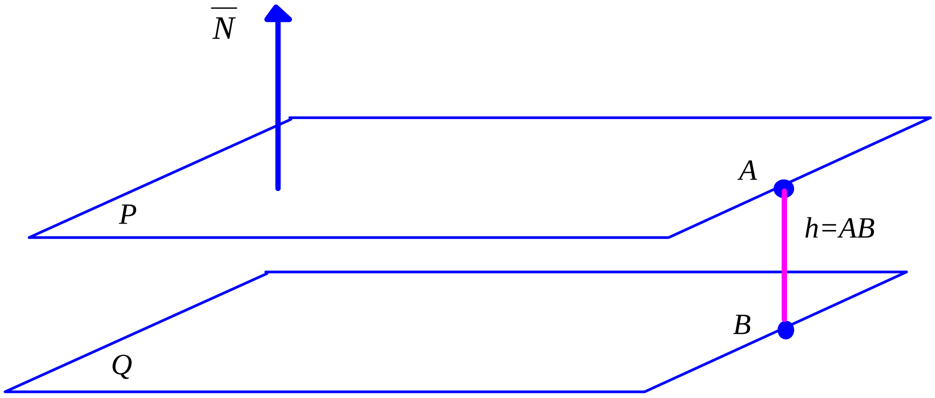
Вывод. Система уравнений совместна. Точка A пересечения двух прямых имеет аппликату $z=1$ и поэтому $\begin{cases} x=z-2 \\ y=2\cdot z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

Ответ. Прямые пересекаются в точке $A(-1;3;1)$.

Пример 7.

Найти расстояние между параллельными плоскостями $2\cdot x-3\cdot y+6\cdot z=68$, $2\cdot x-3\cdot y+6\cdot z=40$.

Решение. Плоскости параллельны, так как они перпендикулярны одной нормали $\overline{N}=(2;-3;6)$.



Найдем какую-нибудь точку A, принадлежащую первой плоскости. Например, полагаем в первом уравнении $y=z=0$:

$2\cdot x-3\cdot y+6\cdot z=68 \Rightarrow 2\cdot x-3\cdot 0+6\cdot 0=68$, $x=34$

Находим расстояние точки $A(34;0;0)$ до второй плоскости $2\cdot x-3\cdot y+6\cdot z=40$

Расстояние h точки $A(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0$ вычисляется по формуле $h=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Приводим второе уравнение к общему уравнению $2\cdot x-3\cdot y+6\cdot z-40=0$

Расстояние

$$h=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow h=\frac{|2\cdot x_0+(-3)\cdot y_0+6\cdot z_0-40|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{|2\cdot 34+(-3)\cdot 0+6\cdot 0-40|}{7};$$

$h=4$

Ответ. $h=4$.

Теория

Прямая на плоскости, $ax+by+c=0$; $y=kx+b$; $k=tg\alpha$ - тангенс угла наклона прямой к оси OX; отрезок, отсекаемый прямой на оси OY, равен b

Уравнение прямой в отрезках : $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, где p, q - отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.

Уравнение пучка прямых $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$;

Условие перпендикулярности прямых, $k_1\cdot k_2=-1$;

Угол между прямыми, $tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$.

Плоскость и прямая в пространстве

Каноническое уравнение плоскости $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0$, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{n}=(a,b,c)$- нормаль плоскости

Общее уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$;

Уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$, где p, q, r - отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.

Угол между плоскостями равен углу между их нормалями, $\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}$.

Расстояние h точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0$ вычисляется по формуле

$$h=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Канонические уравнения прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно направляющему вектору $\overline{s}=(m;n;p)$.

Параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$; уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$;

Уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases},$$

направляющий вектор $\overline{s}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}$, где $\overline{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$, $\overline{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$.

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, $\cos\varphi = \dfrac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \dfrac{9}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}$

Расстояние точки A до прямой $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ равно $h = \dfrac{|\overline{AM_0} \times \bar{s}|}{|\bar{s}|}$, где $M_0(x_0; y_0; z_0)$, направляющий вектор $\bar{s} = (m; n; p)$