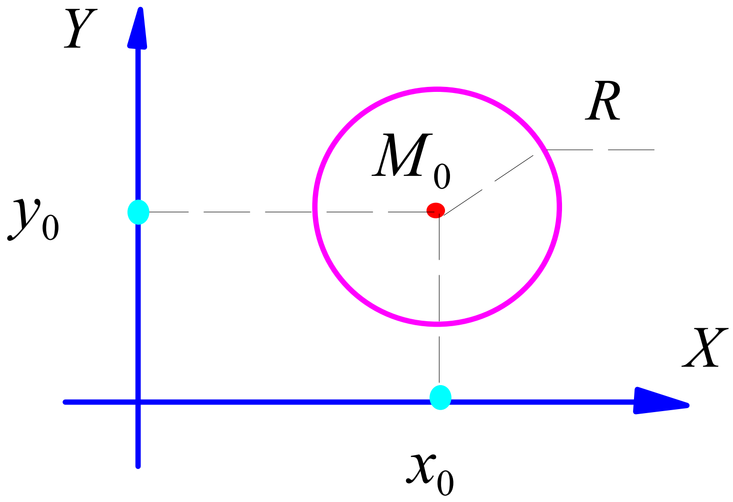
Тема. Кривые и поверхности второго порядка

Лекция 1. Кривые второго порядка

Кривые второго порядка –это эллипс (окружность –частный случай эллипса), гипербола и парабола. Их общее уравнение $ax^2+bxy+cy^2+mx+ny+f=0$ В левой части уравнения записан многочлен от двух переменных, степень которого равна двум.

§1. Каноническое уравнение окружности

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ Центр окружности $M_0(x_0,y_0)$, радиус R.



Пояснение. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ на расстояние R.

Пример. Найти центр и радиус окружности $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

Решение. Выделив полные квадраты по каждой переменной, данное уравнение можно записать в виде:

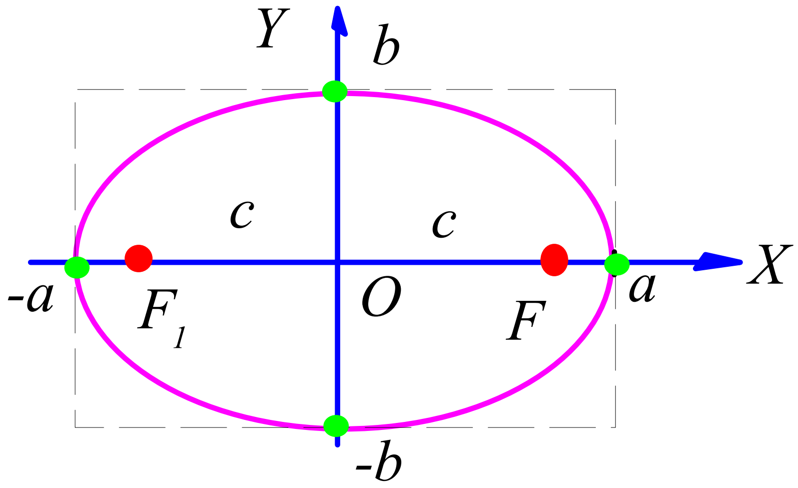
$$x^2+2x+y^2-4y-4=0 \Leftrightarrow \left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-4y+4\right)-4-4=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

Уравнение определяет окружность с центром $(-1;2)$ и радиусом $R=\sqrt{9}=3$

§2. Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Эллипс симметричен относительно координатных осей и получается из окружности $x^2 + y^2 = 1$ единичного радиуса растяжением в a раз по оси OX и b раз по оси OY.

Основные термины, связанные с эллипсом:

1) a - большая полуось; b - малая полуось;

2) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ - полуфокусное расстояние, $c = OF = OF_1$. Точки F, F_1 - фокусы эллипса; OX -фокальная ось, OY - малая ось;

3) точка O - центр эллипса; точки пересечения эллипса с осями координат – вершины эллипса;

4) $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет эллипса – мера вытянутости и отличия его от окружности. Верно $0 \le \varepsilon < 1$. При $\varepsilon = 0$ - окружность.

5) Уравнение смещенного эллипса $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, его оси параллельны координатным осям и центр $M_0(x_0, y_0)$.

Пример. Построить кривую 2-го порядка $x^2 + 9y^2 - 6x - 36y + 36 = 0$

Решение. Выделим полные квадраты:

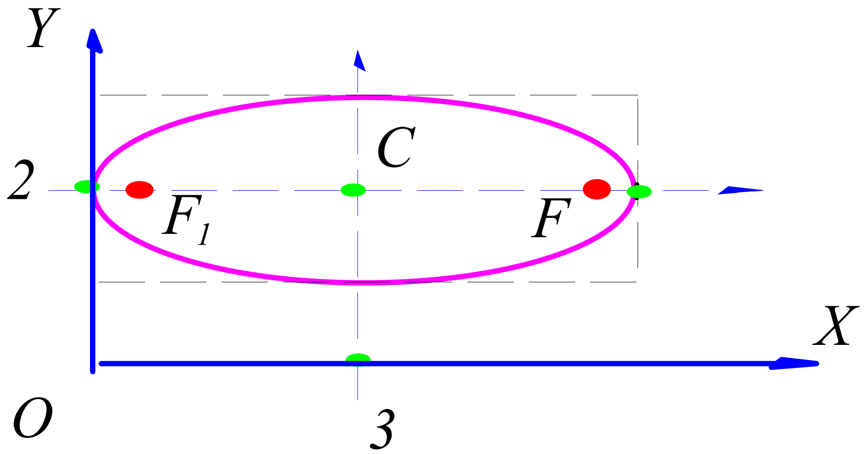
$$x^2 - 6x + 9y^2 - 36y + 36 = 0;\ \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + 9\left(y^2 - 4y + 4\right) - 36 + 36 = 0$$

$$(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 9;\ \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

Это смещенный эллипс с центром $C(3;2)$ и полуосями $a = 3,\ b = 1$

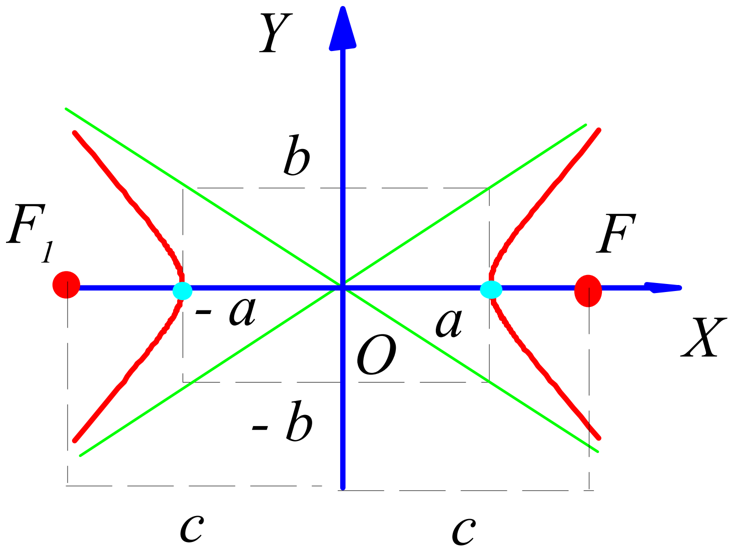
Полуфокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 1} = \sqrt{8} \approx 2,8$

Эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \approx 0,94$



§3. Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Гипербола симметрична относительно координатных осей.

Основные термины, связанные с гиперболой:

1) a - вещественная полуось; b - мнимая полуось;

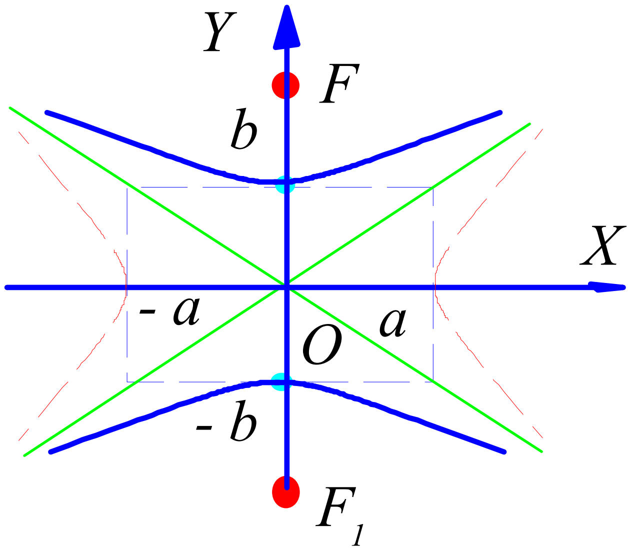
2) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - полуфокусное расстояние, $c = OF = OF_1$. Точки F, F_1 - фокусы гиперболы; OX -фокальная (вещественная) ось, OY - мнимая ось;

3) точка O - центр гиперболы; точки пересечения гиперболы с осями координат – вершины гиперболы;

4) $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет - мера вытянутости гиперболы . Верно $\varepsilon > 1$.

5) Прямые $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ - асимптоты гиперболы. Это прямые с которыми гипербола сближается на бесконечности.

6) сопряженная гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$



7) Уравнение смещенной гиперболы $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, ее оси параллельны координатным осям и центр $M_0(x_0, y_0)$.

Пример. Построить кривую 2-го порядка $x^2 - 9y^2 - 6x + 36y - 36 = 0$

$x^2 - 6\cdot x - 36 - 9\cdot y^2 + 36\cdot y$

Решение. Выделим полные квадраты:

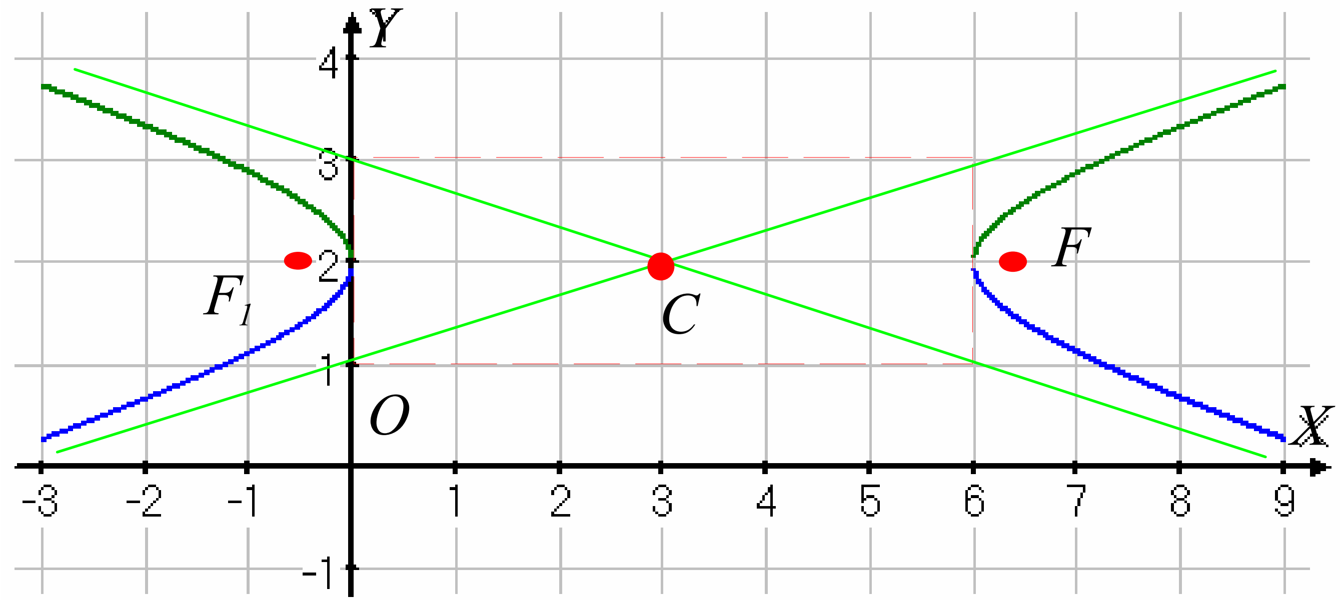
$x^2 - 9y^2 - 6x + 36y - 36 = 0;\ \left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 - 9\left(y^2 - 4y + 4\right) + 36 - 36 = 0$

$\left(x-3\right)^2 - 9\left(y-2\right)^2 = 9;\ \dfrac{\left(x-3\right)^2}{9} - \dfrac{\left(y-2\right)^2}{1} = 1$

Это смещенная гипербола с центром $C\left(3;2\right)$ и полуосями $a = 3,\ b = 1$

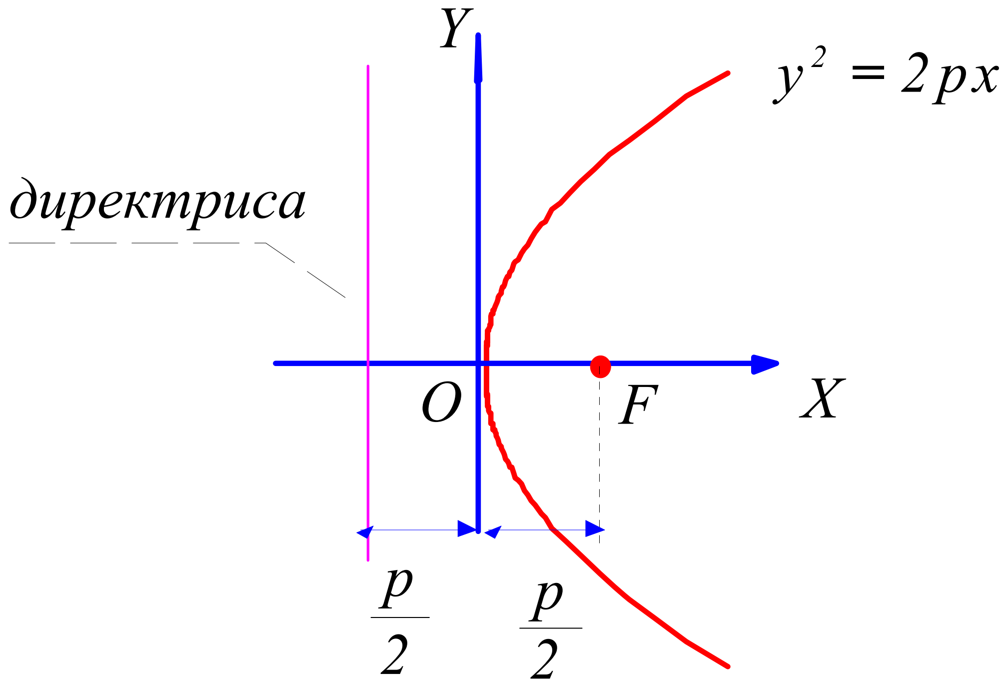
Полуфокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$

Эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}05$



§4. Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px$$



Основные термины, связанные с параболой:

1) p - параметр параболы;

2) OX -фокальная ось; точка O - вершина параболы; точка F - фокус , $OF = \dfrac{p}{2}$ - фокусное расстояние;

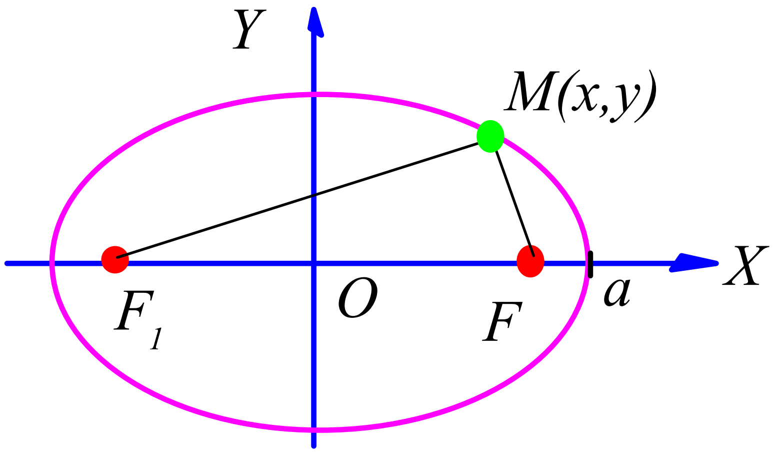
3) прямая $x = -\dfrac{p}{2}$ - директриса параболы;

4) $\varepsilon = 1$ - эксцентриситет параболы.

5) FM - фокальный радиус точки M;

§5. Геометрические определения эллипса, гиперболы и параболы

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости (ГМТ), для которых сумма расстояний до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.



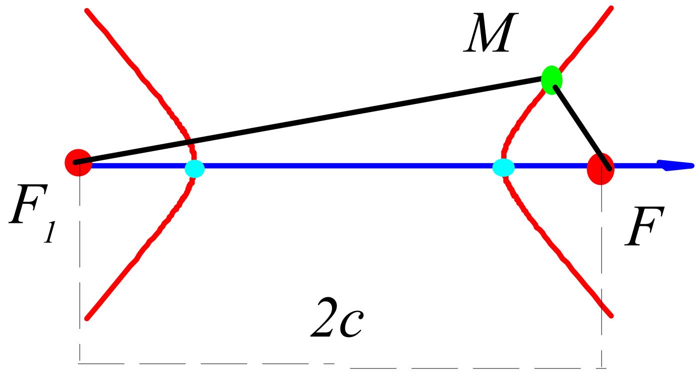
Отрезки $r = FM$, $r_1 = F_1M$ называются фокальными радиусами точки $M(x, y)$

Определение эллипса $r + r_1 = 2a$, $2a < 2c$

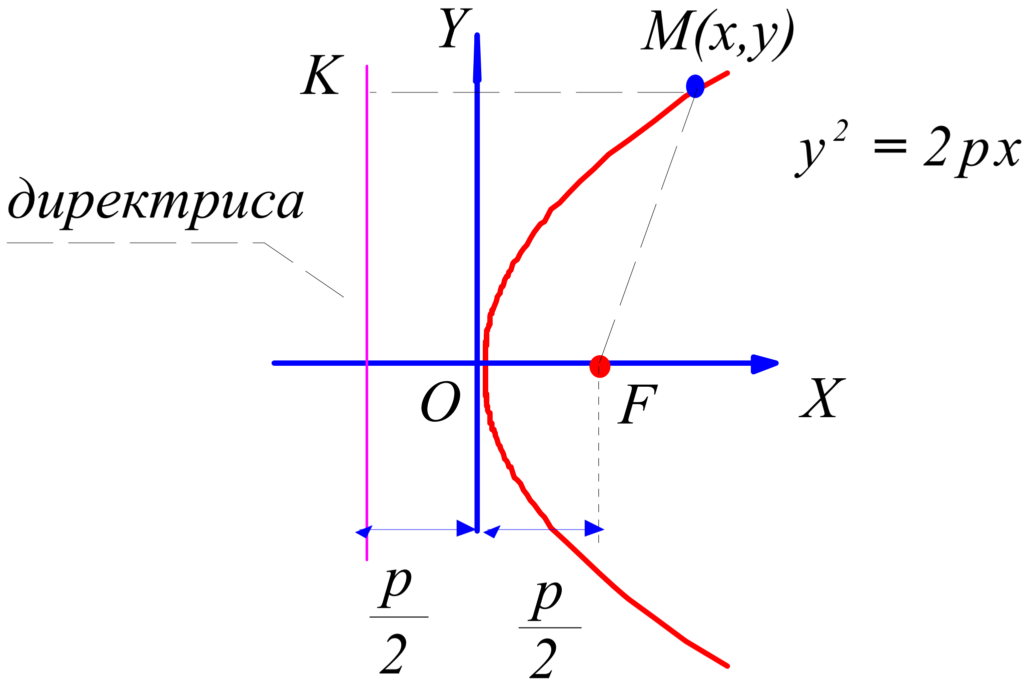
Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Отрезки $r = FM$, $r_1 = F_1M$ называются фокальными радиусами точки $M\left(x, y\right)$

Определение гиперболы $\left|r - r_1\right| = 2a$, $2a > 2c$



Парабола – это множество точек, равноудаленных от данной прямой (директрисы параболы) и данной точки (фокуса параболы), не лежащей на директрисе.



Доказательство. Преобразуем уравнение

$$y^2 = 2px \Leftrightarrow y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{p}{2}\right)^2; \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\left|x+\frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \Leftrightarrow KM = FM$$

Это значит, что любая точка $M(x, y)$ параболы равноудалена от прямой $x = -\dfrac{p}{2}$ и точки $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$.

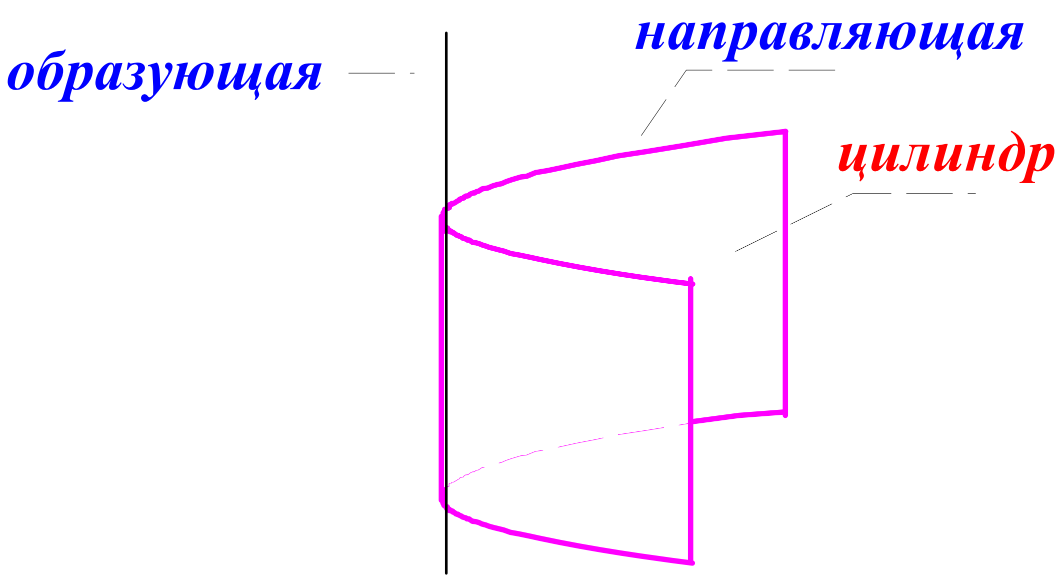
Лекция 2. Поверхности второго порядка

Их общее уравнение $P(x, y, z) = 0$, где многочлен от трех переменных, степень которого равна двум.

Поверхности второго порядка –это цилиндры, эллипсоид (частый случай- сфера), конус, гиперболоиды и параболоиды.

§1. Цилинрическая поверхность

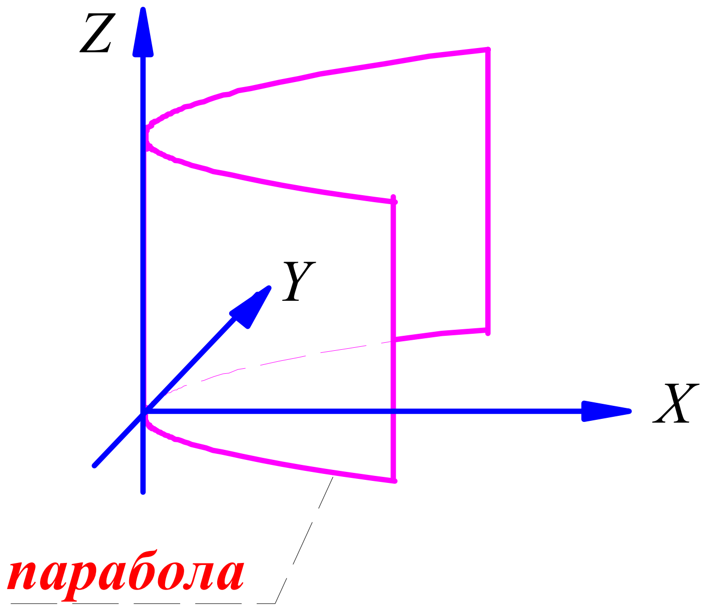
Это поверхность (цилиндр), заметаемая прямой , называемой образующей, при ее параллельном переносе вдоль кривой, называемой направляющей.



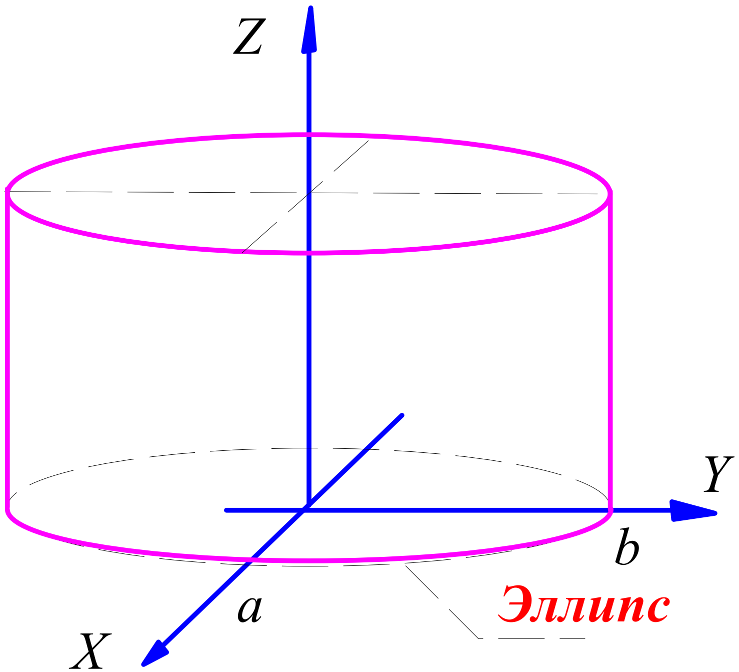
Уравнение, в записи которого отсутствует одна из переменных, определяет цилиндр. Например, $F(x,y)=0 =$ - цилиндр с образующей параллельной оси z, а направляющая линия в плоскости xOy, заданная тем же уравнением.

Уравнения кривых второго порядка в пространстве определяют эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры.

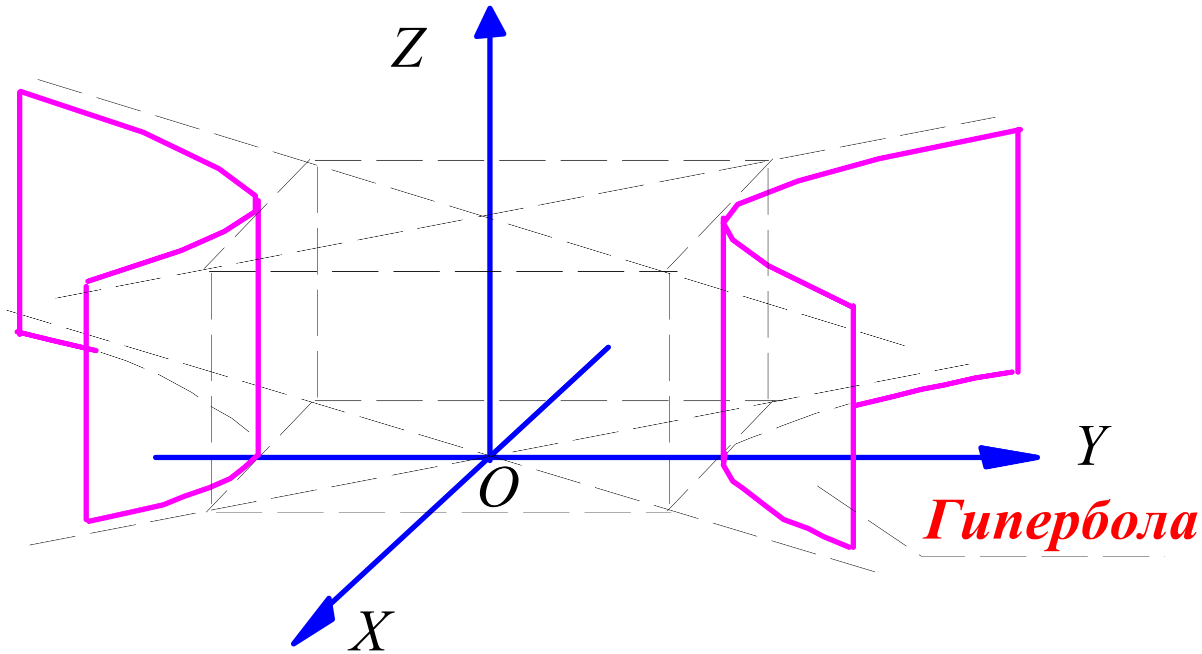
Параболический цилиндр $y^2=2px$



Эллиптический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

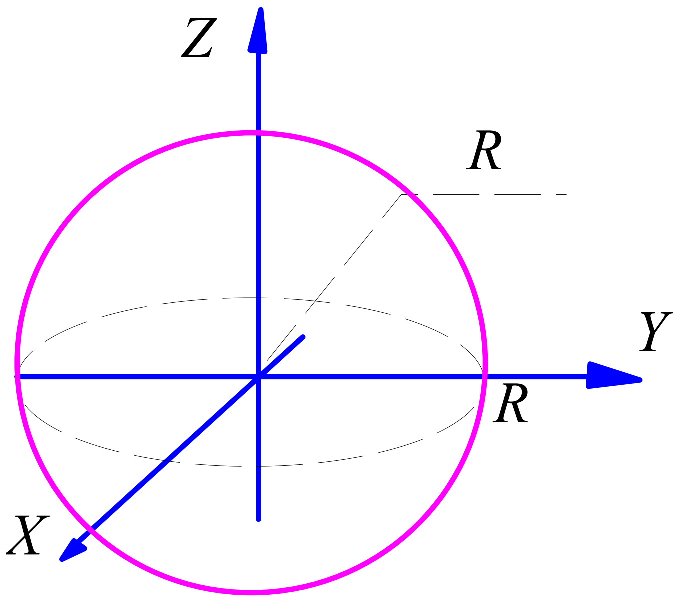


§2. Сфера, эллипсоид

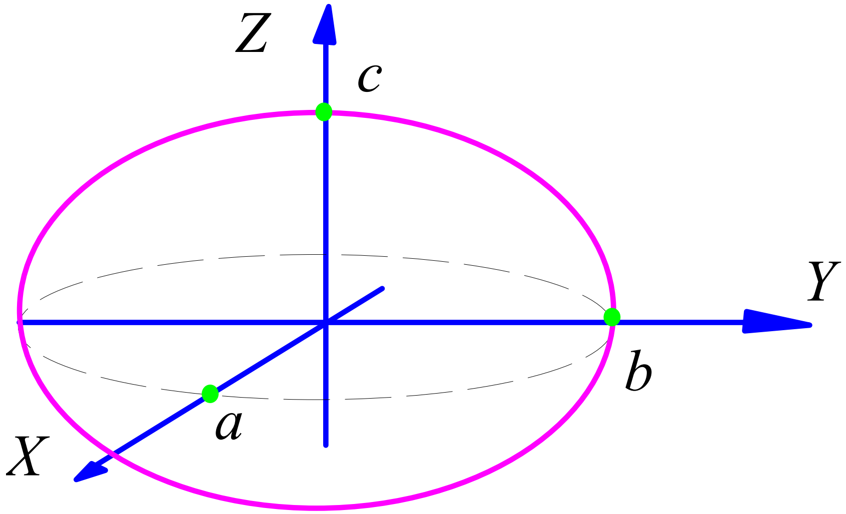
Каноническое уравнение **сферы**

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ Центр сферы $M_0(x_0,y_0,z_0)$, радиус R.

Сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ с центром в точке O.

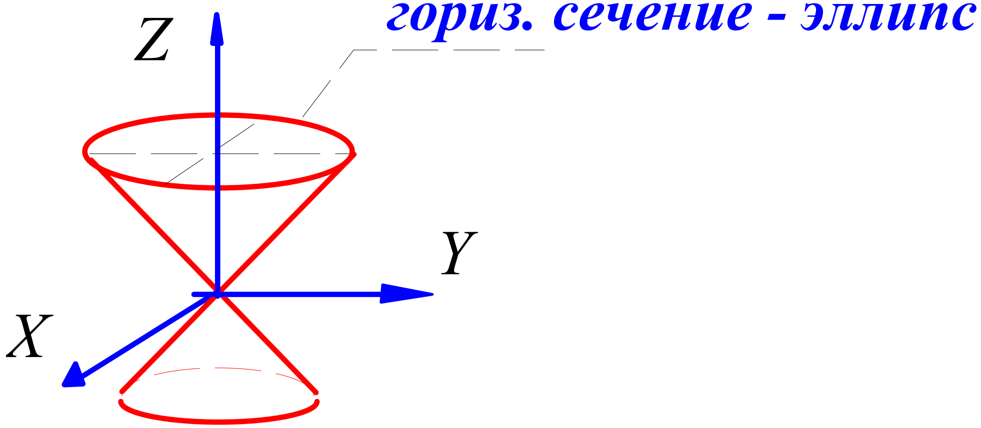


Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где a, b, c - полуоси эллипсоида. Он получается из сферы $x^2+y^2+z^2=1$ единичного радиуса растяжением по осям координат.

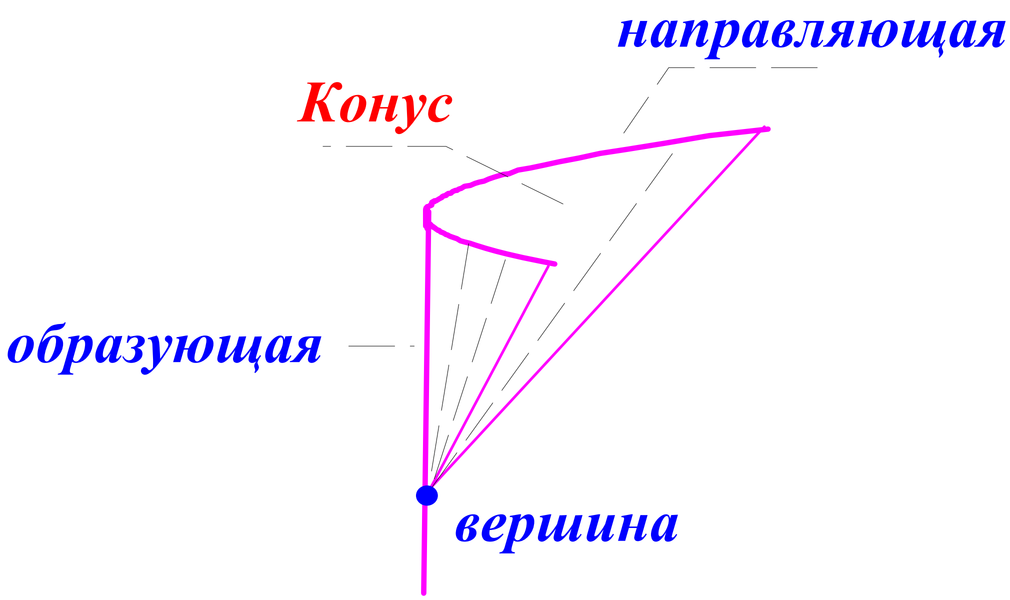


§3. Эллиптический конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

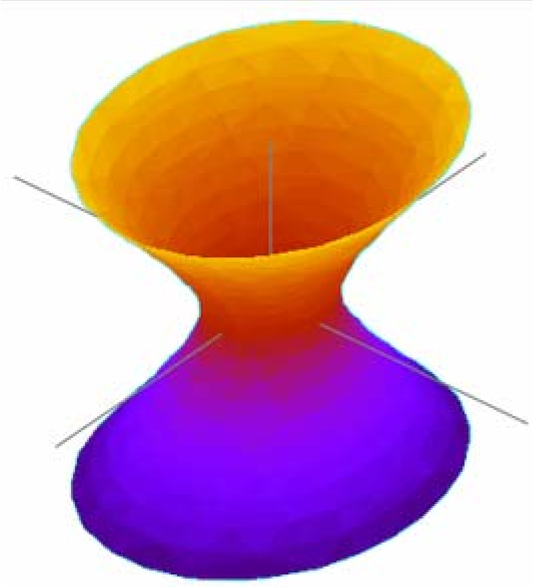


Конусом называется поверхность, заметаемая прямой , называемой образующей и проходящей через фиксированную точку, называемую вершиной конуса, при ее переносе вдоль кривой, называемой направляющей.

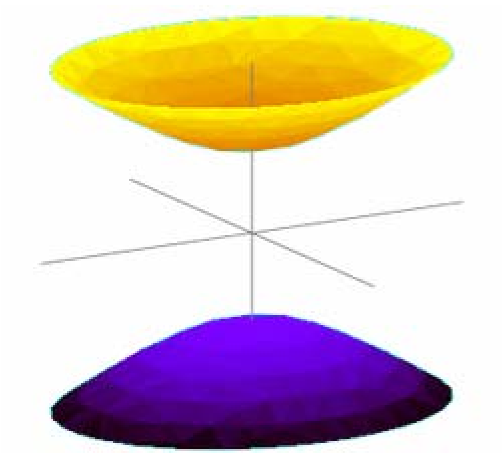


§4. Гиперболиды

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



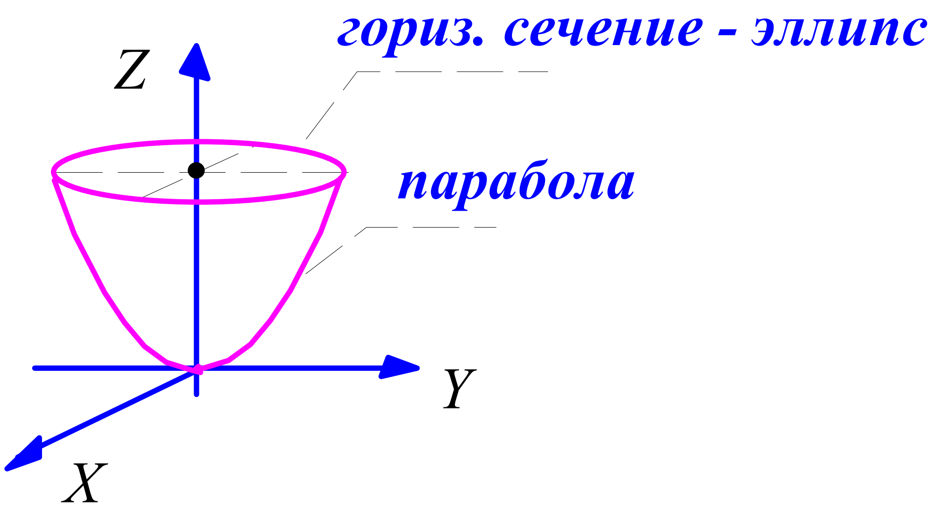
Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



Круговые гиперболоиды получаются вращением гиперболы вокруг своей оси симметрии.

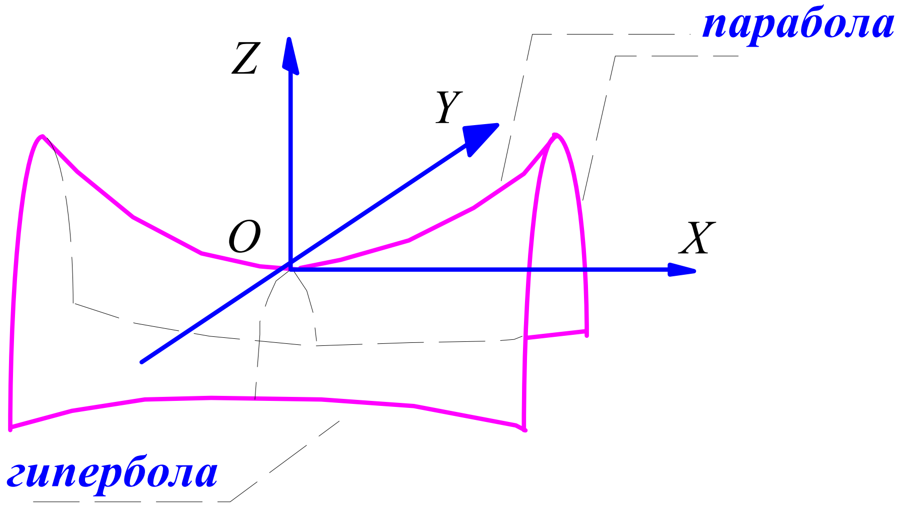
§5. Параболоиды

Эллиптический параболоид $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},\ p, q > 0.$



Круговой параболоид получается вращением параболы вокруг своей оси симметрии.

Гиперболический параболоид (седло) $z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q},\ p, q > 0.$



Список рекомендуемой литературы

1.Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. –М. : Айрис-пресс, 2003. – 288 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии-М: Наука,1984.

3.Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин и др. - М.: изд-во Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. - 471 с.

Список дополнительной литературы

1. **Головина Л.Л**. Линейная алгебра и некоторые ее приложения
2. **Щипачев, В.С**. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Щипачев.– М. : Высш. шк., 1998.– 479 с.
3**. Ильин В.А., Поздняк** Э.Г. Линейная алгебра.-М.Наука,1983.
4. **Солодовников А.С, Торопова Г.А**. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии,1987, ВШ
5. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А**. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов.М.:Наука,1981.
6. **Данко П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1 / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.– М. : Высш. шк., 1999.– 304 с.
7. **Щипачев В.С.** Задачник по высшей математике / В.С. Щипачев.– М. : Высш. шк., 2001.– 304 с.