Составитель. В.П.Белкин

Лекция 1. Функция нескольких переменных

1. Основные понятия

Зависимость $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ переменной z от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называется функцией n аргументов $x_1, x_2, \ldots x_n$

В дальнейшем будем рассматривать функции 2-х или 3-х переменных, т.е $z = f(x, y)$, $w = f(x, y, z)$

Совокупность точек (x, y), для которых значение $f(x, y)$ существует , называется областью определения $D(f)$ функции (ООФ).

Область значений функции $\{z \in R | z = f(x, y) \wedge (x, y) \in D(f)\}$

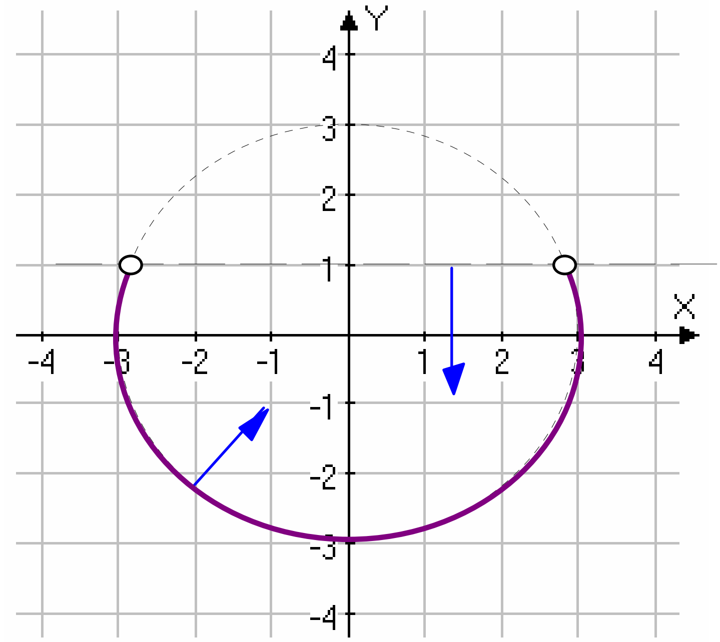
Пример. Изобразить на плоскости XOY область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln(1 - y)$

Решение. Запишем условия, при которых существуют слагаемые $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ (существование корня) , $1 - y > 0$ (существование логарифма).

1) граница образа $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ определяется уравнением $9 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

Это окружность, неравенство определяет круг радиуса $R = 3$

2) Образ $1 - y > 0$ - это полуплоскость.



Область определения $D(f)$ равна пересечению построенных областей.

2. График функции. Линии и поверхности уровня

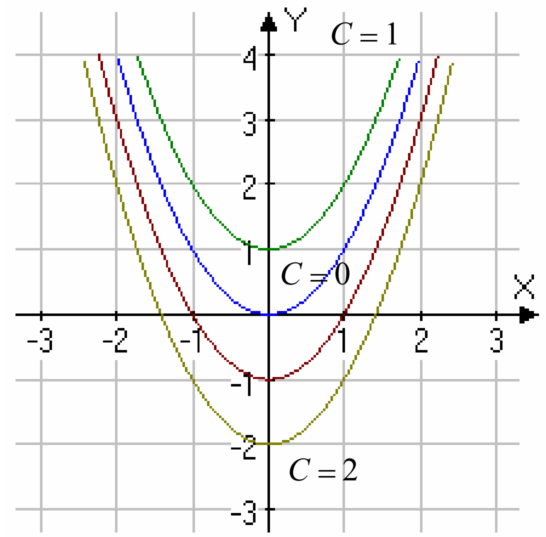
График функции $z = f(x, y)$ - это множество точек (x, y, z), для которых $z = f(x, y)$ и $(x, y) \in D(f)$.

Как правило, график функции является поверхностью.

Линия уровня функции $z = f(x, y)$ определяется уравнением $f(x, y) = C$, где C - константа. Она возникает как проекция линии пресечения горизонтальной плоскости $z = C$ и поверхности $z = f(x, y)$ на плоскость XOY.

Даже небольшое число линий уровня дают представление о графике функции.
Поверхность уровня функции $w = f(x,y,z)$ определяется уравнением $f(x,y,z) = C$

Пример. Построить на плоскости XOY несколько линий уровня функции
$z = y - x^2$
Решение. Уравнение линии уровня $z = C \Rightarrow y - x^2 = C$, $y = x^2 + C$. Это семейство парабол. Построим, указывая для каждой параболы значение константы C
$C = 0$



3. Предел

Предел функции $f(x,y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ - это число , обозначаемое $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ или $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$, где точка $M(x,y)$ стремится к предельной точке $M_0(x_0,y_0)$,т.е. расстояние $\rho = MM_0 \to 0$. Предел можно определить согласно равенству

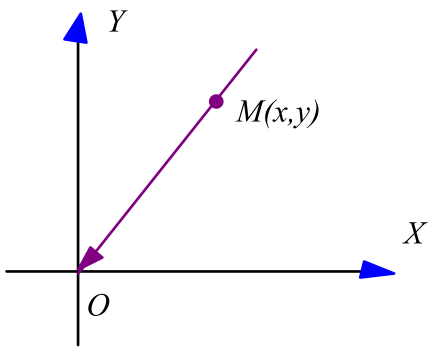
$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{MM_0 \to 0} f(M)$$

Это значит, что при $M \approx M_0$ вытекает $f(M) \approx A$

Предел функции нескольких переменных обладает обычными свойствами предела

Замечание. Предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ не зависит от пути, по которому точка M стремится к предельной точке $M_0(x_0,y_0)$.Если же такая зависимость имеет место, то предел не существует.

Пример. Доказать, что предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x+y}{x}$ не существует .



Решение. Устремим точку $M(x,y)$ к точке $O=M_0$ по прямой $y=k\cdot x$. Вычисляем предел при этом условии

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+k\cdot x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+k)}{x}=\lim_{x\to 0}(1+k)=1+k$$

Этот предел зависит от способа приближения $M\to M_0$. Поэтому предел функции двух аргументов не существует.

При вычислении предела элементарных функций применяют принцип подстановки $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$, если значение $f(M_0)$ существует, т.е. предел не имеет неопределенности.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}\frac{2x+y}{x\cdot y}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}$

4.Непрерывность

Функция $f(x,y)$ непрерывна в точке M_0, если верно равенство $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$

В противном случае M_0 называется точкой разрыва функции. Функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в любой точке этой области.

Элементарные функции непрерывны в области D, если они в этой области определены, т.е. $D\subseteq D(f)$

Точки разрыва функции, как правило, образуют линии разрыва.

5.Приращение функции

Частные приращения возникают при изменении одного аргумента

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

Полное приращение

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

При малых приращения аргументов $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$ справедливо приближенное равенство $\Delta z\approx\Delta_x z+\Delta_y z$

6.Частные производные

Частные производные функции $z=f(x,y)$ обозначаются

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z'_x,\ z'_y,\ f'_x,\ f'_y$$

Запись $\frac{\partial z}{\partial x}$ читаем «дэ зэт по дэ икс».

Определение частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x};\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Равносильное определение $\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$

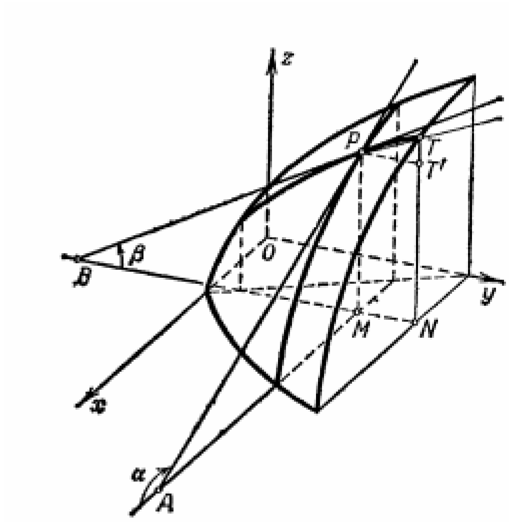
Пример. Найти частные производные функции $z=x^2+x\cdot y^3$

При нахождении частной производной по переменной x применяем обычные приемы дифференцирования, считая, что аргумент y есть константа.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2+x\cdot y^3\right)'_x=\left(x^2\right)'_x+\left(x\cdot y^3\right)'_x=\left(x^2\right)'_x+\left(x\right)'_x\cdot y^3=2x+y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+x\cdot y^3\right)'_y=\left(x^2\right)'_y+\left(x\cdot y^3\right)'_y=0+x\cdot\left(y^3\right)'_y=x\cdot 3y^2$$

Для функции двух переменных сохраняется геометрический смысл частной производной первого порядка как тангенса угла наклона касательной к сечению графика



7. Дифференциал

Дифференциал dz функции $z=f(x,y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$$

Учитывая, что для независимых аргументов $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, можно переписать формулу

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy,$$

которая остается верной и для зависимых аргументов. Это инвариантная форма записи дифференциала.

Определение дифференциала.

Запишем разложение приращения Δz функции в сумму главной части $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ и бесконечно малой $\alpha\cdot\rho$ более высшего порядка, т.е.

$\Delta z=\left(A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y\right)+\alpha\cdot\rho$, где $\alpha\to 0$ при $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$, A,B - $const$

Дифференциалом функции называется главная часть приращения Δz, линейная относительно Δx и Δy, т.е. $dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$

Можно доказать, что $A=\frac{\partial f}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}$

При малых значениях $\Delta x,\Delta y\approx 0$ верно приближенное равенство $\Delta z\approx dz$

Функция называется дифференцируемой, если у нее существует дифференциал. Для дифференцируемости достаточно потребовать существование непрерывных частных производных.

8.Производная сложной функции

1) Формула полной производной. Если аргументы x,y функции $z=f\left(x,y\right)$ зависят от переменной t, то переменная $z=z(t)$. Ее производная равна

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Эту формулу можно получить из формулы дифференциала делением обеих частей на dt

2) Пусть $x=x\left(u,v\right)$ и $y=y\left(u,v\right)$. Тогда верно, что $z=z\left(u,v\right)$. Частные производные получаются на основе предыдущей формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\,;\;\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

9.Производная неявно заданной функции

1) Уравнение $F\left(x,z\right)=0$ определяет неявно зависимость $z=z(x)$

Верна формула $\frac{dz}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_z}$

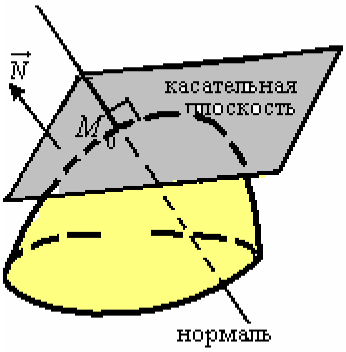
Доказательство. Находим дифференциал

$$F\left(x,z\right)=0\Rightarrow dF=0\,,\;\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot dz=0\,,\;F'_x+F'_y\cdot\frac{dz}{dx}=0\,,\;\frac{dz}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

2) $F\left(x,y,z\right)=0\Rightarrow z=z\left(x,y\right)$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$

10.Уравнения касательной плоскости и нормали поверхности

Касательная плоскость к поверхности $F\left(x,y,z\right)=0$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ определяется как множество векторов с началом в точке M_0, касающихся поверхности в этой точке.



Нормаль касательной плоскости – это вектор, равный $\overline{N}=(A,B,C)$, где координаты $A=F'_x$, $B=F'_y$, $C=F'_z$ вычислены в точке M_0.

Нормаль к графику функции $z=f(x,y)$ равна $\overline{N}=(f'_x, f'_y, -1)$

Уравнение касательной плоскости $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$

Нормали поверхности- это прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания M_0.

Канонические уравнения нормали к поверхности , заданной уравнением $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, имеют вид: $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$

11.Линеаризация функции

Линеаризация функции $z=f(x,y)$ возникает, если в окрестности точки M_0 эту поверхность заменить на касательную плоскость с точкой касания M_0.
Дифференциал функции – это приближенное значение приращения , вычисленное по касательной плоскости.
Получаем формулу
$\Delta z\approx dz \Rightarrow f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+dz$, где дифференциал $dz=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$ вычислен в точке M_0

12.Частные производные высших порядков

Частные производные второго порядка получаются как производные от производных:
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

Для дифференцируемых функций справедливо равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

Это значит, что частные производные не зависят от порядка дифференцирования.

В общем случая производные порядка n записываются $\frac{\partial^n z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ при $\alpha+\beta=n$

13. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал второго порядка получается как дифференциал от дифференциала, т.е. $d^2z=d(dz)$

Можно получить формулу $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2$, при обозначениях $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$

Инвариантное свойство дифференциалов высших порядков не выполняется, но форма записи сохраняется.

Удобно записать дифференциал порядка n в операторной форме

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$$

14.Формула Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$:

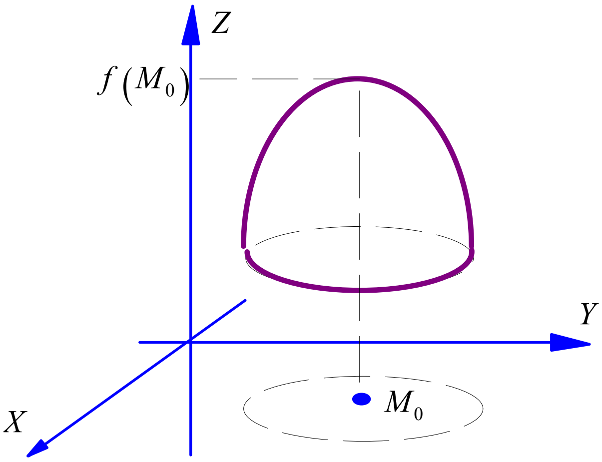
$f(M) = f(M_0) + \frac{dz}{1!} + \frac{d^2 z}{2!} + \ldots + \frac{d^n z}{n!} + R_n$, где R_n - остаточный член и $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ - факториал числа n

Отсюда получаем линеаризацию функции $z = f(x, y)$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ при $n = 1$ $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y - y_0)$.

Лекция 2. Экстремум функция нескольких переменных

1. Основные понятия

Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный максимум, если значение $f(M_0)$ является единственным наибольшим значением в некоторой окрестности этой точки, т.е для такой окрестности верно $\forall M \neq M_0 \left(f(M) < f(M_0) \right)$



Аналогично определяем локальный минимум функции в точке M_0 как наименьшее значение $f(M_0)$ в некоторой окрестности этой точки M_0,
$\forall M \neq M_0 \left(f(M) > f(M_0) \right)$.

Локальные максимумы и минимумы называются экстремумами функции, а точка M_0 - точкой экстремума (максимума или минимума).

2. Необходимые условия локального экстремума

Необходимый признак экстремума. Точка экстремума M_0 дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является стационарной, т.е. в ней верно $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Например, условие $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ вытекает из того, что функция $z = f(x, y_0)$ принимает локальный экстремум при $x = x_0$.

С геометрической точки зрения касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ для точки $M_0(x_0, y_0)$ экстремума параллельна плоскости XOY

3. Достаточные условия локального экстремума функции $z=f(x,y)$

Достаточный признак экстремума функции $z=f(x,y)$ в стационарной точке (x_0,y_0):

Вычислим значения в точке (x_0,y_0):

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\ ,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

Возможны три случая.

Случай 1. При $\Delta>0$ есть экстремум; при $A>0$ - минимум, $A<0$ - максимум.

Случай 2. При $\Delta<0$ - экстремума нет, точка (x_0,y_0)-седловая, т.е. в одном направлении у функции имеется максимум, а в другом – минимум.

Случай 3. $\Delta=0$ требуется дополнительное исследование.

Пример.

Найти экстремумы функции : $z=x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8$

Решение. Исследуем функцию на локальный экстремум. Для этого определим ее стационарные точки - точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю. Находим частные производные 1-го порядка функции :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8\right)=\ 2x+4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8\right)=\ 2y+2.$$

Находим стационарные точки функции. Для этого приравниваем частные производные к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+4=0\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y+2=0.$$

Решаем систему: $x=-2$, $y=-1$

Стационарная точка $(-2;-1)$

Проверим достаточные условия экстремума функции двух переменных

Достаточный признак экстремума в стационарной точке (x_0,y_0):

Обозначения: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\ ,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ в точке (x_0,y_0).

1) при $\Delta>0$ есть экстремум; если $A>0$ - минимум, а при $A<0$ - максимум;

2) при $\Delta<0$ - экстремума нет, точка (x_0,y_0)-седловая. т.е. в одном направлении функция имеется максимум, а в другом - минимум; 3) $\Delta=0$ требуется дополнительное исследование.

Находим частные производные второго порядка в стационарной точке $(-2;-1)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2x+4)'_x=2$$

смешанная производная

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x+4)=0;$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2y+2)'_y=2$$

Определитель $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0$, $A=2>0$

Следовательно, в этой стационарной точке исследуемая функции имеет локальный экстремум. Так как $A>0$, то это точка минимума.

$z_{\min}=f(-2;-1)=(-2)^2+(-1)^2+4\cdot(-2)+2\cdot(-1)-8=-13$

Находим условный экстремум функции $z=x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8$ при условии $x^2+y^2=2$

4.Условный экстремум

Условный экстремум (т.е. наибольшее или наименьшее значение) функции $z=f(x,y)$ при условии, что $\varphi(x,y)=0$ можно найти простых случая приведением функции к одной переменной. Для этого , например, переменную $y=y(x)$ выражаем из условия связи $\varphi(x,y)=0$ и подставляем эту переменную в формулу $z=f(x,y)$. Далее находим экстремум функции одного аргумента.

Пример. Найти условный экстремум функции $z=x^2+y^2-4x$ при условии $x+y=1$

Решение. Выразим $y=1-x$ из равенства $x+y=1$. Находим

$z=x^2+y^2-4x=x^2+(1-x)^2-4x=2x^2-4x+1$

Производная $z'_x=(2x^2-4x+1)'=4x-4$

Критические точки: $z'_x=0 \Rightarrow 4x-4=0$, $x=1$, $y=1-x=1-1=0$

График функции $z=x^2+y^2-4x$- это смещенный параболоид $z=(x-2)^2+y^2-4$

Вертикальная плоскость $x+y=1$ пересекает параболоид по параболе

Поэтому найденная точка $(1;0)$ соответствует условному минимуму этой функции для точек прямой $x+y=1$

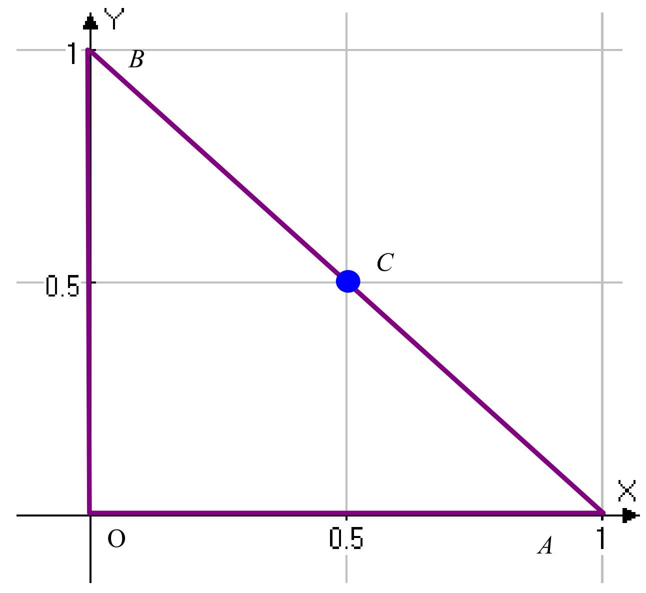
5.Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции в замкнутой области существуют и обозначается $\max\limits_{(x,y)\in R} z(x,y)$; $\min\limits_{(x,y)\in R} z(x,y)$.

Глобальный экстремум функция достигает внутри области R или на ее границе.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=3x^2+y^2+2y$ в замкнутой области, ограниченная линиями: $x+y=1$, $x=0$, $y=0$

Решение. Изобразим область - треугольник OAB.



Исследуем локальные экстремумы функции. Для этого определим ее стационарные точки - точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю.

Находим частные производные 1-го порядка функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + y^2 + 2y\right) = 6x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + y^2 + 2y\right) = 2y + 2.$$

Приравниваем производные к нулю: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2 = 0 \Rightarrow x = 0, \; y = -1$.

Полученная стационарная точка $(0;-1)$ не принадлежит области OAB.

Находим точки, в которых возможны глобальные условные экстремумы на границе области.

Случай 1. Граница OA, ее уравнение $y = 0$; функция $z = 3x^2 + y^2 + 2y = 3x^2$.

Производная $z' = \left(3x^2\right)' = 6x$. Находим критические точки

$z' = 0 \Rightarrow 6x = 0; \; x = 0$

Точка $(0; 0)$ является угловой точкой области OAB.

Значение $z(O) = 3x^2 + y^2 + 2y = 0$

Случай 2. Граница OB, уравнение $x = 0$. Отсюда $z = 3x^2 + y^2 + 2y = y^2 + 2y$

Производная $z' = \left(y^2 + 2y\right)' = 2y + 2$; $z' = 0 \Rightarrow 2y + 2 = 0; \; y = -1$

Эта точка $(0;-1)$ не принадлежит области.

Случай 3. граница AB, уравнение $y = 1 - x$.

Функция $z = 3x^2 + y^2 + 2y \;\Rightarrow z = 3 \cdot x^2 + (1-x)^2 + 2 \cdot (1-x)$, $z = 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3$

Производная $z' = \left(4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3\right)' = 8 \cdot x - 4$.

Критические точки: $z' = 0 \Rightarrow 8 \cdot x - 4 = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $y = 1 - x = \frac{1}{2}$

Полученная точка $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ принадлежит области.

Значение $z(C)=3x^2+y^2+2y=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=2$

Вычислим значения функции $z=f(x,y)$ в угловых точках O , $A(1;0)$, $B(0;1)$ и точке $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

$z(O)=0$; $z(A)=3$; $z(B)=3$; $z(C)=2$

Среди этих значений выберем наибольшее и наименьшее. Имеем:

$\max\limits_{OAB} z(x,y)=z(A)=z(B)=3$; $\min\limits_{OAB} z(x,y)=z(O)=0$

6. Нахождение условного экстремума методом множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа позволяет найти условный экстремум (т.е. наибольшее или наименьшее значение) функции $z=f(x,y)$ при условии, что $\varphi(x,y)=0$. Условный экстремум достигается в стационарной точке функции Лагранжа $L=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$. Число λ - множитель Лагранжа.

В частности, следует решить систему уравнений $\frac{\partial L}{\partial x}=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$.

Проверка того, что в найденной точке достигается условный экстремум, может быть основана на геометрических или физических соображениях .

Пример.

Найти условный экстремум функции $z=x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8$ при условии $x^2+y^2=5$

Принимаем $\varphi(x,y)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-25=0$,т.е. $\varphi(x,y)=x^2+y^2-5$

Функция

$$L=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)\Rightarrow L=\left(x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8\right)+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-5\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left(\left(x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8\right)+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-5\right)\right)'=2x+4+\lambda\cdot 2x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\left(\left(x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8\right)+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-5\right)\right)'=2y+2+\lambda\cdot 2y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\left(\left(x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8\right)+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-5\right)\right)'=x^2+y^2-5$$

Стационарные точки

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\Rightarrow\ \begin{cases}2x+4+\lambda\cdot 2x=0\\ 2y+2+\lambda\cdot 2y=0\\ x^2+y^2-5=0\end{cases}$$

Исключаем множитель Лагранжа

$$2+(1+\lambda)\cdot x=0\Rightarrow x=-\frac{2}{1+\lambda}$$

$$y+1+\lambda\cdot y=0\Rightarrow y=-\frac{1}{1+\lambda}$$

$x^2+y^2-5=0 \Rightarrow \left(-\frac{2}{1+\lambda}\right)^2+\left(-\frac{1}{1+\lambda}\right)^2-5=0$, $5\cdot\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2=5$;

$\frac{1}{1+\lambda}=\pm1$; $1+\lambda=\pm1$; $\lambda=-1\pm1$

Случай. $\lambda=-1+1=0$, $x=-2$; $y=-1$

Случай. $\lambda=-1-1=-2$, $x=2$; $y=1$

Стационарные точки условного экстремума $A(2;1)$, $B(-2;-1)$

Находим значение

$z=x^2+y^2+4\cdot x+2\cdot y-8 \Rightarrow z(A)=2^2+1+4\cdot2+2-8=7$

$z(B)=(-2)^2+(-1)^2+4\cdot(-2)+2\cdot(-1)-8=-13$

С геометрической точки зрения непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве принимает как наибольшее, так и наименьшее значения

Поэтому $z_{\max}=z(A)=7$; $z_{\min}=z(B)=-13$

Лекция 3. Основы теории поля. Градиент, ротор. Производная по направлению.

1.Скалярное поле. Градиент. Производная по направлению

Говорят, что в двумерной области $D\subseteq XOY$ В задано скалярное поле, если в каждой точке $M(x,y)\in D$ задана скалярная функция координат точки: $U=U(x,y)$

Пример: скалярное поле температур $T=T(x,y)$ в области D.

Линии уровня скалярного поля – это такие линии, на каждой из которых функция $U(x,y)$ сохраняет постоянное значение.

Уравнения линий уровня скалярного поля: $U(x,y)=const$.

Геометрически линии уровня получаются, если поверхность $u=U(x,y)$ пересекать горизонтальными плоскостями $u=C$ и проектировать линии пересечения на плоскость XOY.

В случае трехмерного скалярного поля $U=U(x,y,z)$ говорят о поверхностях уровня $U(x,y,z)=const$

2. Градиент.

Градиентом скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в фиксированной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ называется вектор, проекции которого на оси координат совпадают с частными производными функции, вычисленными в точке M_0:

$$grad U=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\bar{k}=\left(\frac{\partial U}{\partial x};\frac{\partial U}{\partial y};\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

где векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – это орты координатных осей.

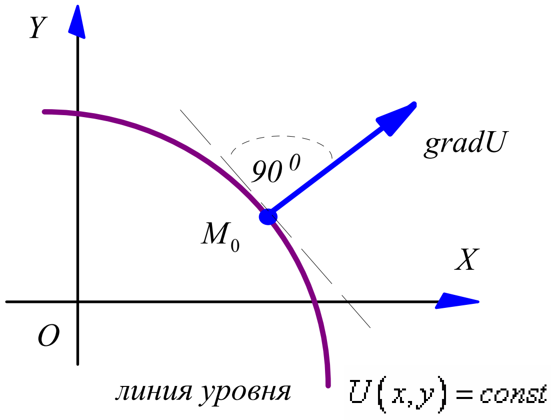
В случае двумерного скалярного поля $U=U(x,y)$ градиент равен

$$grad U=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\bar{j}=\left(\frac{\partial U}{\partial x};\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Свойства градиента.

1.Градиент $gradU$ перпендикулярен линии уровня (поверхности уровня), проходящей через точку M_0.

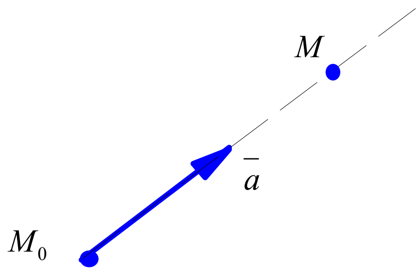
2.Направление градиента указывает направление наибольшего роста функции U в точке M_0 .



Производная по направлению

Отложим от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ некоторый вектор $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$.

Скорость изменения скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в направлении этого вектора равна $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{a}}=\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{U(M)-U(M_0)}{MM_0}$



Эта величина $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{a}}$ называется производной функции U по направлению вектора $\bar{a}$ в точке M_0

В случае единичного вектора $\bar{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы, этот эта производная равна

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{n}}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\cos\gamma,$$

где частные производные вычислены в точке M_0

Например, частная производная $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ выражает скорость изменения поля в направлении оси абсцисс

Если направление в точке M_0 задано произвольным вектором $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z)$, то его направляющие косинусы равны $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$

Производные по направлению векторов $\bar{n}$, $\bar{a}$ равны между собой.

Поэтому $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{a}}=\dfrac{\partial U}{\partial x}\cdot\dfrac{a_x}{|\bar{a}|}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\cdot\dfrac{a_y}{|\bar{a}|}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\cdot\dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$ или окончательно $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{a}}=\dfrac{(gradU,\bar{a})}{|\bar{a}|}$

Пример. Вычислить градиент $gradU$ скалярного поля $U = x^2 - xy + y^2$ и производную $\frac{\partial U}{\partial \bar{a}}$ в точке $A(1;1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (3;4)$

Решение. Находим частные производные первого порядка.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 - xy + y^2\right)'_x = 2x - y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 - xy + y^2\right)'_y = -x + 2y$.

А) Градиент в точке $A(1;1)$ при $x = 1$, $y = 1$:

$$gradU = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\bar{j} = (2x - y)\cdot\bar{i} + (-x + 2y)\cdot\bar{j} = \bar{i} + \bar{j} = (1;1)$$

Производная по направлению вектора $\bar{a} = (3;4)$ равна проекции градиента $gradU$ на направление вектора $\bar{a}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} = Пр_{\bar{a}}gradU \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial \bar{a}} = \frac{\left(gradU, \bar{a}\right)}{\left|\bar{a}\right|}.$$

Вычислим модуль $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Скалярное произведение $\left(gradU, \bar{a}\right) = 1\cdot 3 + 1\cdot 4 = 7$

Отсюда производная по направлению вектора $\bar{a}$ в точке $A(1;1)$ равна:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{a}} = \frac{\left(gradU, \bar{a}\right)}{\left|\bar{a}\right|} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Векторное поле. Дивергенция, ротор.

Векторное поле определяется векторная функция $\bar{A} = (P,Q,R)$, где P,Q,R - функции точки $M(x,y,z)$. Например, скорость $\bar{v}(M)$ течения жидкости в точке $M(x,y,z)$

Дивергенцией векторного поля называется скалярная величина $div\bar{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, не зависящая от выбора системы координат.

Ротором (вихрем) векторного поля $\bar{A} = (P,Q,R)$ называется вектор

$$rot\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Введем оператор «набла» $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Тогда ротор выражается при помощи векторного произведения $rot\bar{A} = \nabla \times \bar{A}$

Проекции ротора равны

$$rot_x\bar{A} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ rot_y\bar{A} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ rot_z\bar{A} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Ротор – это векторная величина, указывающая на завихренность поля.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Уравнение линии уровня: $f(x,y) = C$.

Полное приращение функции, $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$.

Частные производные:

1) сложной функции, $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$; $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$;

2) высших порядков $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$;

3) $F(x,y)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$; $F(x,y,z)=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$.

Дифференциалы

1) для независимых аргументов: $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$,

2) функции $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$; $d^2z=d(dz)$;

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2;\quad d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Формула Тейлора . Разложение функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$:

$f(M)=f(M_0)+\frac{dz}{1!}+\frac{d^2z}{2!}+\ldots+\frac{d^nz}{n!}+R_n$, где R_n - остаточный член.

Линеаризация функции $z=f(x,y)$ в окрестности $M_0(x_0,y_0)$:

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0).$$

Нормаль $\overline{N}=(A;B;C)$ и касательная плоскость к поверхности $F(x,y,z)=0$:

$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$, $A=\frac{\partial F}{\partial x}$, $B=\frac{\partial F}{\partial y}$, $C=\frac{\partial F}{\partial z}$.

В случае $z=f(x,y)$ верно $A=\frac{\partial f}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}$, $C=-1$.

Необходимый признак экстремума. Точка экстремума M_0 дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ является стационарной, т.е. в ней верно $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Достаточный признак экстремума в стационарной точке (x_0,y_0):

Обозначения: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}$ в точке (x_0,y_0).

1) при $\Delta>0$ есть экстремум; при $A>0$ - минимум, $A<0$ - максимум;
2) при $\Delta<0$ - экстремума нет, точка (x_0,y_0) -седловая, т.е. в одном направлении имеется максимум, а в другом - минимум; 3) $\Delta=0$ требуется дополнительное исследование.

Метод множителей Лагранжа . Условный экстремум функции $z=f(x,y)$ при условии, что $\varphi(x,y)=0$ достигается в стационарной точке M_0 функции Лагранжа $L=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$. Решаем систему $\frac{\partial L}{\partial x}=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$, исключая множитель Лагранжа λ. Проверка того, что в точке достигается условный экстремум, может быть основана на геометрических или физических соображениях .

Градиент $grad\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\overline{\mathbf{i}}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\overline{\mathbf{j}}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\overline{\mathbf{k}}$.

Производная функции $\varphi=\varphi(x,y,z)$ по направлению $\overline{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{n}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\cos\gamma\ ;$$

для направления вектора $\bar{a}$ производная функции $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{a}} = \frac{\bar{a}\cdot grad\varphi}{|\bar{a}|}$

Дивергенция и ротор векторного поля $\bar{A} = A_x\,\bar{\mathbf{i}} + A_y\,\bar{\mathbf{j}} + A_z\,\bar{\mathbf{k}}$:

$$div\,\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\ ;\ rot\,\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$