Векторная алгебра

В.П. Белкин

Навигация: назад; вперед; в начало; в конец

Введение

Векторное исчисление – это математическая дисциплина, изучающая свойства векторов, во всех их проявлениях и разделяется на векторную алгебру и векторный анализ. Условно это можно понимать так. Векторная алгебра изучает постоянные вектора, а анализ – переменные вектора.

Предметом изучения алгебры являются такие операции над векторами как сложение векторов и умножение их на число, скалярное произведение, векторное произведение и смешанное произведение, преобразования векторов базис пространства, проекции векторов и тому подобное.

Понятие вектора как направленного отрезка возникло и сформировалось в 18-веке при решении физических задач и задач механики при изучении движения тела под действием сил.

В настоящее время трудно представить себе сферу точного знания, в которой не использовалось бы понятие вектора и системы координат.

При изучении темы рекомендуется литература [1-3] и интернет ресурс [4]

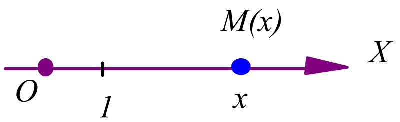
Лекция 1. Векторы на прямой, плоскости и в пространстве

§1. Система координат на плоскости и в пространстве

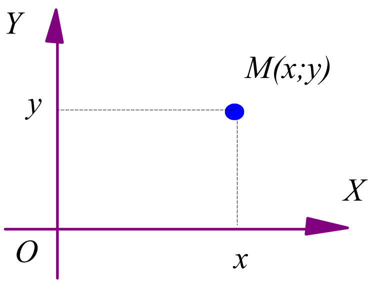
В геометрии имеются три важных пространства- прямая размерности $\dim = 1$, плоскость размерности $\dim = 2$ и обычное воспринимаемое нашими ощущениями пространство размерности 3.

Произведем оцифровку этих пространств, т.е. укажем способ декартовой системы координат, согласно которому положение точки на прямой определяем одним числом x, на плоскости парой чисел $(x;y)$, а в трехмерном пространстве тройкой чисел $(x;y;z)$

Числовая ось OX возникает из прямой, если на ней указана точка отсчета O, масштабная единица и положительное направление. Каждой точке M числовой прямой сопоставляется число x, называемое абсциссой этой точки. Причем $x = OM$, если M находится на положительном луче OX оси и $x = -OM$ для точек отрицательного луча

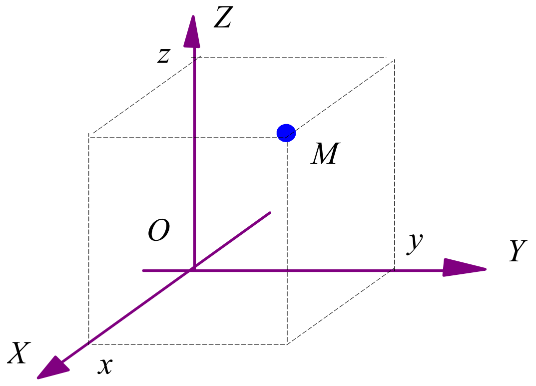


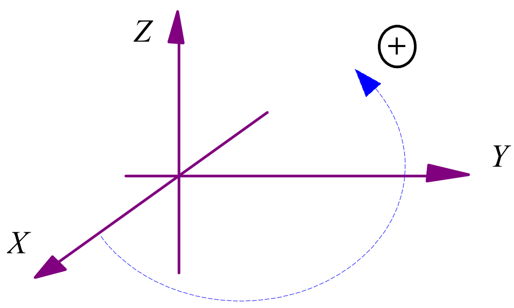
Декартова система координат на плоскости состоит из двух перпендикулярных числовых осей OX (ось абсцисс) и OY (ось ординат)



Каждой точке M плоскости сопоставляется пара чисел $(x;y)$. Для этого из точки M следует опустить перпендикуляры на оси OX, OY. Основания перпендикуляров называются координатами точки $M(x;y)$, где x - абсцисса точки, а y - ордината.

Декартова система координат в пространстве состоит из трех взаимно перпендикулярных числовых осей OX (ось абсцисс), OY (ось ординат) и OZ (ось аппликат)

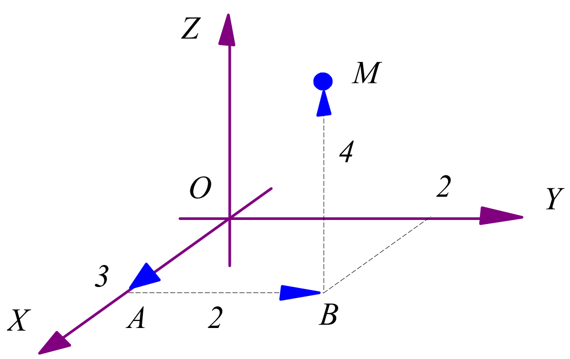




Аналогично каждой точке M пространства сопоставляем тройку координат $(x;y;z)$, которые возникают как основания перпендикуляров опущенных из точки M на координатные оси. Точки $x;y;z$ называются проекциями точки M на координатные оси. Проекции $x;y;z$ называются также декартовыми координатами точки

Изображенная система координат называется правой, т.е. кратчайший поворот от OX к OY, а затем к OZ виден против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении

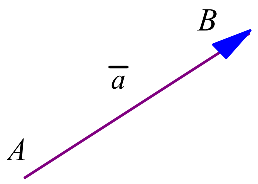
При построении точки, например, $M(3;2;4)$ производим три движения. Из точки O двигаемся оси абсцисс в точку $A(3;0;0)$. Затем перемещаемся вдоль оси ординат на 2 единицы в положение $B(3;2;0)$ и из этой точки поднимаемся вверх на 4 единицы в положение $M(3;2;4)$



Вывод. Положение любой точки прямой, плоскости или пространства однозначно определяется ее координатами. Поэтому геометрические задачи можно привести к задачам, которые имеют дело с числами, т.е. аналитическим задачам.

§2. Основные понятия

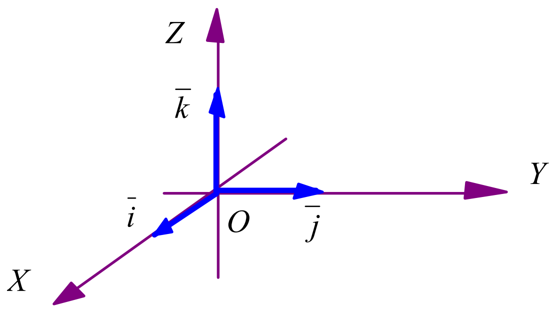
Вектором $\overline{AB}$ называется любой направленный отрезок с началом A и концом B. Вектор можно обозначать и так $\bar{a}=\overline{AB}$. Введенные таким образом вектора называются геометрическими (по природе происхождения)



Длина отрезка AB называется и модулем вектора и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$ или просто AB.

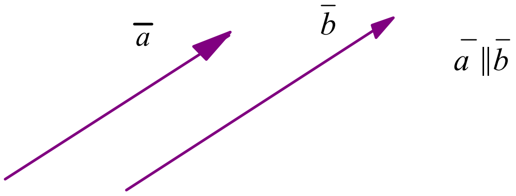
Вектор нулевой длины называется нулевым и обозначается $\bar{0}$ или 0 (не путать с числом). Вектор единичной длины называется ортом или единичным вектором.

Единичные векторы координатных осей OX, OY, OZ обозначаются $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$



§3. Взаиморасположение векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой. Этот факт записываем так: $\bar{a}\|\bar{b}$. Если направления этих векторов совпадают, то вектора называются сонаправленными $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$, а в противном случае конаправленными, т.е. $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$



Перпендикулярность (ортогональность) векторов обозначается $\overline{a} \perp \overline{b}$

Два вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ называются равными, что записывается $\overline{a} = \overline{b}$, если выполнены условия:

1) $\overline{a} \parallel \overline{b}$ -векторы коллинеарны;

2) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ -векторы сонаправленны;

3) $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ -векторы имеют равные модули.

Выводы.

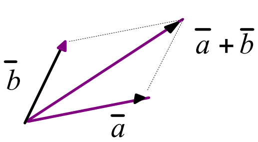
1.При параллельном переносе геометрический вектор не меняется.

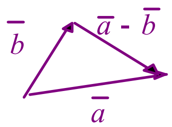
2.Любую совокупность векторов можно при помощи параллельного переноса привести к общему началу.

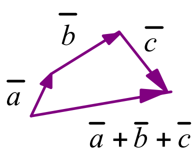
3.Геометрические векторы применяются в физике и теоретической механике как изображение силы, скорости и тому подобное. Однако они немного отличаются от физических векторов, которые не всегда сохраняют свое действие при параллельном переносе.

§4. Линейные операции над геометрическими векторами

Сумма векторов обозначается $\overline{a} + \overline{b}$ и определяется по правилу параллелограмма, т.е. равна диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах







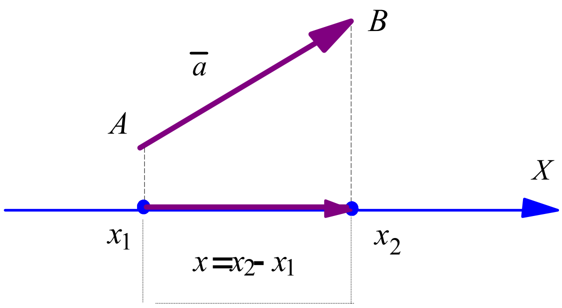
Разность векторов $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$ находим по правилу треугольника. Правило многоугольника. Сумма $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ равна замыкающему вектору ломаной, составленной из слагаемых векторов. При умножении скаляра (т.е. числа) λ на вектор $\bar{a}$ этот вектор растягивается в λ раз.

§5. Проекции вектора на координатные оси

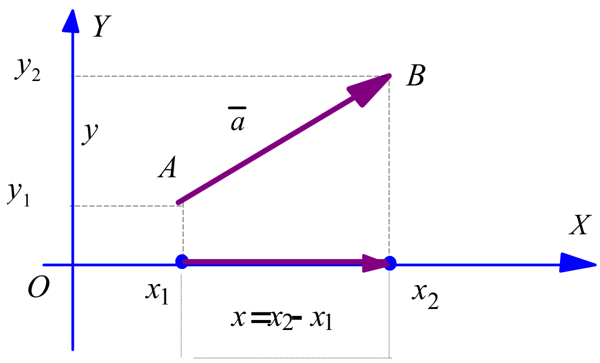
Вектор как и точку на прямой, плоскости или в пространстве можно определить набором чисел .

Проекцией x вектора $\overline{AB}$ на ось абсцисс называется разность $x = x_2 - x_1$, где x_1, x_2 - проекции начала и конца вектора на ось.

Определим проекцию $x = x_2 - x_1$ вектора



Любой вектор на плоскости $\overline{AB}$ имеет две проекции (абсцисса и ордината) $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$. Каждый вектор однозначно определяется своими проекциями, и записывается так как $\overline{AB} = (x; y)$.



В пространстве возникает проекция $z = z_2 - z_1$ на ось аппликат, вектор записывается $\overline{AB} = (x; y; z)$ или по другому $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

Теорема. Тройка проекций вектора однозначно определяет вектор

Правило. Проекции вектора $\overline{AB}$ равны разности одноименных координат его конца и начала, т.е. верно равенство $\overline{AB}=B-A$

Доказательство вытекает из определения проекций, т.е.

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=B(x_2;y_2;z_2)-A(x_1;y_1;z_1)$$

Векторы, заданные проекциями, называются арифметическими. Множество арифметических векторов прямой, плоскости и пространства обозначаются R, R^2, R^3 соответственно.

§6. Базис пространства

Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости

Любые три некомпланарные вектора $\bar a,\bar b$, $\bar c$ называются базисом пространства.

Базисом плоскости называются любые два неколлинеарные вектора этой плоскости.

Вектор $\bar d=x\times\bar a+y\times\bar b+z\times\bar c$, где x,y,z - скаляры (т.е. числа) называется линейной комбинации векторов $\bar a,\bar b$, $\bar c$, причем x,y,z называются координатами вектора $\bar a$ в этом базисе .

Теорема. Любой вектор $\bar d$ можно единственным образом разложить по базису.

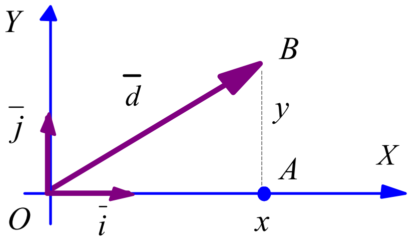
Например, в случае пространства это значит, что выполнено равенство

$\bar d=\alpha\times\bar a+\beta\times\bar b+\gamma\times\bar c$ для некоторых скаляров α,β,γ.

В случае декартовой системы координат можно записать разложение вектора $\bar d$ по базису $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ в виде $\bar d=x\times\bar i+y\times\bar j+z\times\bar k$. Числа x,y,z называются декартовыми координатами вектора $\bar d$

Теорема. Разложение вектора по $\bar d=(x,y,z)$ по единичным векторам $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ координатных осей можно записать так $\bar d=x\times\bar i+y\times\bar j+z\times\bar k$, т.е. верно соотношение $\bar{d}=(x;y;z) \Leftrightarrow \bar{d}=x\cdot\bar{i}+y\cdot\bar{j}+z\cdot\bar{k}$. Другими словами, проекции и координаты вектора в декартовой системе координат совпадают.

Доказательство приведем для двумерного вектора $\bar{a}=(x;y)$



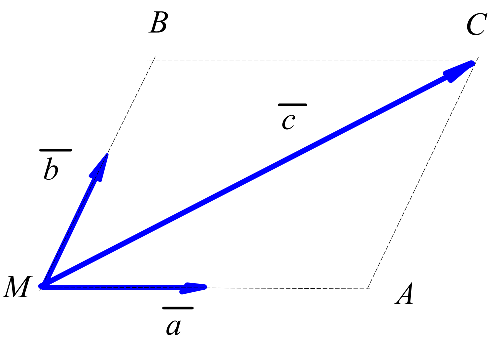
Запишем равенство $\bar{d}=\overline{OA}+\overline{AB}=x\cdot\bar{i}+y\cdot\bar{j}$.

§7. Геометрический способ разложения вектора по базису

Теорема. Любой вектор можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, причем единственным образом.

Проверим это утверждение в случае пространства векторов на плоскости

Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ - базис на плоскости. Разложим вектор $\bar{c}$, т.е. представим его в виде линейной комбинации базисных векторов $\bar{c}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{b}$ при некоторых $\alpha,\beta\in R$



Применим правило параллелограмма и запишем равенство $\bar{c}=\overline{MC}=\overline{MA}+\overline{MB}$

Вектор $\overline{MA}$ коллинеарен ненулевому вектору $\bar{a}$ и поэтому получается из него растяжением в α раз, запишем для векторов равенства $\overline{MA}=\alpha\cdot\bar{a}$, $\overline{MB}=\beta\cdot\bar{b}$. Поэтому верно $\bar{c}=\overline{MA}+\overline{MB}\Rightarrow\bar{c}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{b}$

§8. Свойства линейных операций над векторами

Вектора можно складывать и умножать на скаляр. Эти свойства аналогичны свойствам операций суммы и умножения чисел. Приведем некоторые из них, чтобы иметь представления об этих свойствах.

Перестановочность $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$

Ассоциативность $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)$

$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$ - свойство нулевого вектора

Первое свойство означает, что результат сложения векторов не зависит от порядка слагаемых

Второе свойство означает, что результат сложения векторов не зависит порядка расстановки скобок.

Свойства умножения вектора на скаляр

Эти свойства по смыслу не являются чем-то новым с точки зрения наших навыков преобразования алгебраических выражений. Приводим без доказательства основные из этих свойств

$\alpha\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\alpha\cdot\bar{a}+\alpha\cdot\bar{b}$,

$(\alpha+\beta)\cdot\bar{a}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{a}$

$(\alpha\beta)\cdot\bar{a}=\alpha\left(\beta\cdot\bar{a}\right)$

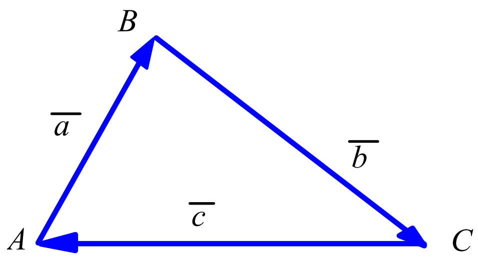
$0\cdot\bar{a}=\bar{0}$,

$\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$

В практике скаляры можно записывать слева и справа от вектора, однако в строгих математических книгах это не допустимо.

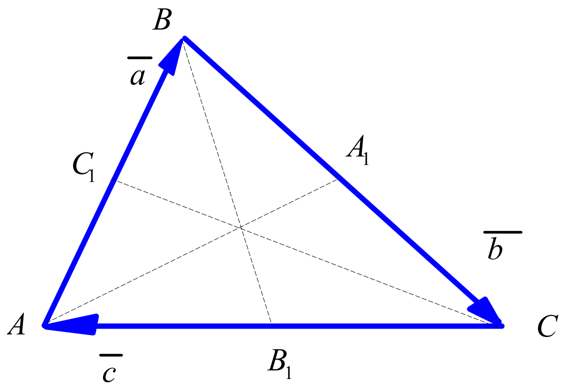
Пример. Доказать, что из медиан треугольника можно при помощи параллельного переноса составить новый треугольник

Применим условие того, что из трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ можно при помощи параллельного переноса составить треугольник



Это условие выражается как истинность равенства $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$

Проведем медиану $\overline{AA_1}$ в треугольнике ABC



Находим $\overline{AA_1}=\overline{a}+\frac{1}{2}\cdot\overline{b}$. B_1

Аналогично определяем остальные медианы $\overline{BB_1}=\overline{b}+\frac{1}{2}\cdot\overline{c}$ и $\overline{CC_1}=\overline{c}+\frac{1}{2}\cdot\overline{a}$

Находим сумму трех медиан

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{a}+\frac{1}{2}\cdot\overline{b}+\overline{b}+\frac{1}{2}\cdot\overline{c}+\overline{c}+\frac{1}{2}\cdot\overline{a}\Rightarrow\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{0}$$

§9. Линейные операции над векторами, заданными проекциями

Операции сложения, вычитания, умножения на скаляр векторов, заданных в проекциях, выполняются покоординатно. Например: $(1;4)+(4;-3)=(1+4;4-3)=(5;1)$; $6\cdot(2;-3)=(12;-18)$

Теорема. Пусть $\overline{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\overline{b}=(x_2;y_2;z_2)$. Тогда верно

$\overline{a}+\overline{b}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$;

$\overline{a}-\overline{b}=(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2)$;

$\alpha\cdot\overline{a}=(\alpha\cdot x_1;\ \alpha\cdot y_1;\ \alpha\cdot z_1)$;

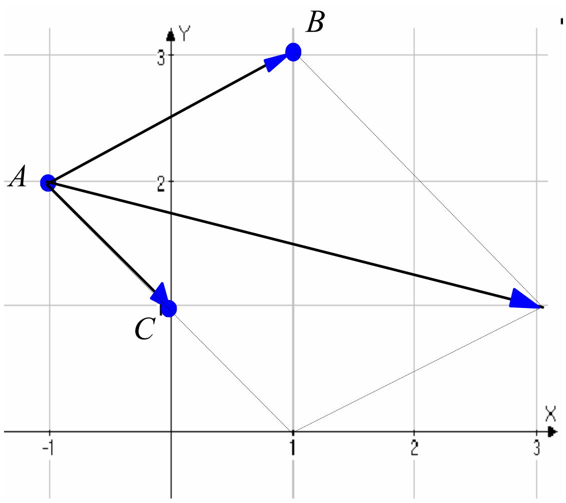
Пример. Вычислить вектор $\overline{a} = \overline{AB} + 2\times\overline{AC}$, если $A(-1;2)$, $B(1;3)$, $C(0;1)$

Находим $\overline{AB} = B(1;3) - A(-1;2) = (2;1)$

$\overline{AC} = C(0;1) - A(-1;2) = (1;-1)$

$\overline{a} = \overline{AB} + 2\times\overline{AC} = (2;1) + 2\times(1;\ -1) = (4;\ -1)$

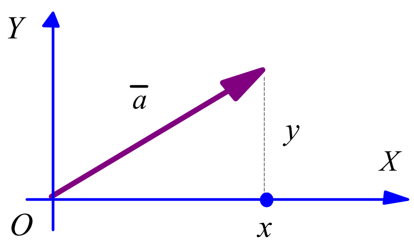
Построим чертеж



§10. Модуль вектора. Расстояние между двумя точками в пространстве

Теорема. Модуль вектора $\overline{a} = (x;y;z)$ равен $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Это равенство является следствием теоремы Пифагора. Приведем чертеж для двумерного вектора $\overline{a} = (x;y)$



Расстояние между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ в пространстве равно $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Лекция 2. Приложения векторов

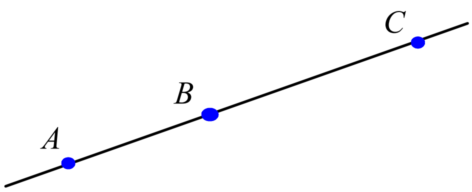
§1. Признак коллинеарности векторов

$\bar{a}\parallel\bar{b} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$

Необходимость. Пусть векторы $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ коллинеарны. Можно принять, что $\bar{b}\neq 0$. Поэтому верно равенство $\bar{a}=\gamma\times\bar{b}$ для некоторого скаляра γ. Отсюда $x_1=\gamma\times x_2$, $y_1=\gamma\times y_2$, $z_1=\gamma\times z_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\gamma$

Пример. Лежат ли точки $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $C(4;3;4)$ на одной прямой?

Решение. Схематический чертеж



Три точки A,B,C лежат на одной прямой в том и только том случае, если векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, т.е. параллельны одной прямой.

Находим вектора

$\overrightarrow{AB}=B(2;1;2)-A(1;0;1)=(1;1;1)$

$\overrightarrow{AC}=C(4;3;4)-A(1;0;1)=(3;3;3)$

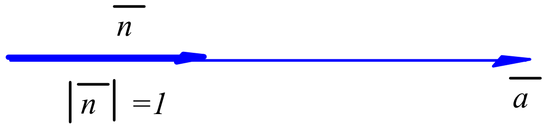
Признак коллинеарности двух векторов $\bar{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\bar{b}=(x_2;y_2;z_2)$

$\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$

В нашем случае пропорциональность выполняется, так как $\overrightarrow{AC}=3\times\overrightarrow{AB}$. Поэтому три точки A,B,C лежат на одной прямой точки.

§2. Орт вектора

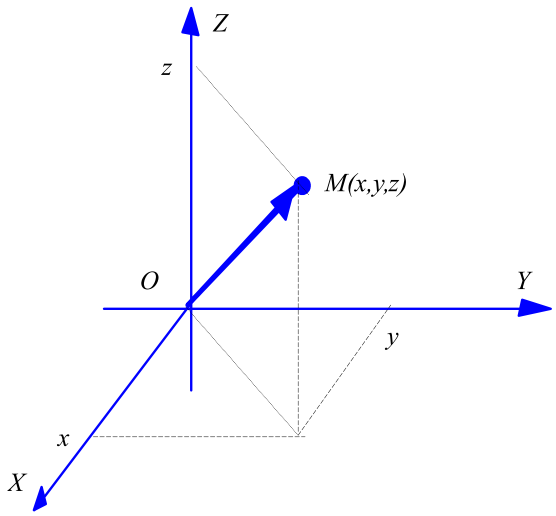
Единичный вектор $\bar{n}$ называется ортом вектора $\bar{a}$, если они коллинеарны и сонаправлены.



Орт вектора получается из вектора $\bar{a}$ сжатием в $\lambda = |\bar{a}|$ раз, т.е. верно равенство $\bar{n} = \frac{1}{|\bar{a}|} \times \bar{a}$

§3. Радиус-вектор точки

Радиус-вектором точки $M(x, y, z)$ называется вектор $\overline{OM}$

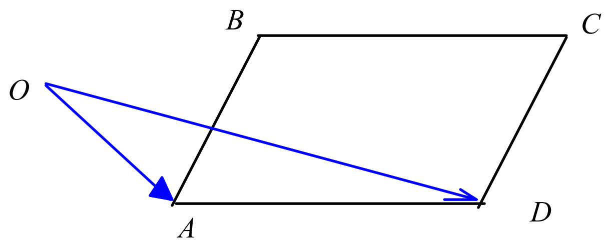


Легко понять, что координаты вектора $\overline{OM}$ совпадают с координатами точки $M(x, y, z)$, т.е. $\overline{OM} = (x, y, z)$. Для этого достаточно из координат конца вектора вычесть нулевые координаты начала вектора.

Это простое определение прокладывает мостик между геометрией точек и алгеброй векторов. Другими словами, обычные геометрические задачи можно решать применяя векторы.

Пример. Найти четвертую вершину параллелограмма $ABCD$, если известны три последовательные вершины параллелограмма : $A(3;-5;4)$, $B(2;0;2)$, $C(3;1;0)$.

Решение. Построим схематически параллелограмм $ABCD$.



Радиус-вектор $\overline{OD}$ точки D находим по правилу многоугольника: $\overline{OD}$ $= \overline{OA} + \overline{AD}$.

Так как при параллельном переносе вектор не меняется, поэтому верно равенство $\overline{AD} = \overline{BC}$. Координаты радиус-вектора $\overline{OD}$ совпадают с координатами его конца D.

Итак, имеем $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC}$

Вычислим координаты векторов: $\overline{OB} = (2;0;2)$,

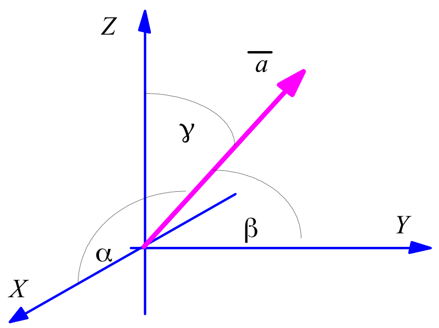
$\overline{AD} = \overline{BC} = C\,(3;1;0) - B\,(2;0;2) = (1;1;-2)$

Суммируем и получаем координаты точки: $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC} = (3;-5;4) + (1;1;-2) = (4;-4;2)$.

Координаты точки найдены $D\,(4;-4;2)$

§4. Направляющие углы и направляющие косинусы вектора

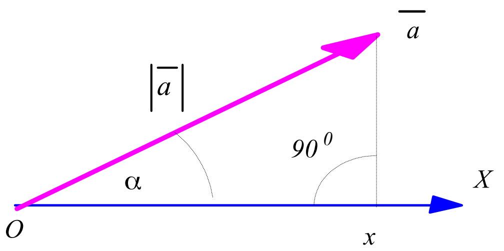
Углы α, β и γ, образуемые вектором $\overline{a} = (x, y, z)$ с координатными осями, называются направляющими углами вектора. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами.



Направляющие косинусы находят по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|}$$

Проверим первую из этих формул



Найдем проекцию вектора $\bar{a}=(x,y,z)$ на ось абсцисс и решим прямоугольный треугольник. Находим косинус угла как отношение прилежащего катета к гипотенузе, т.е. $\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|}$

Предложение. Вектор $\bar{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ имеет единичную длину, т.е. $|\bar{n}|=1$, что равносильно равенству $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Этот вектор вычисляется по формуле $\bar{n}=\frac{1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$ и называется ортом вектора $\bar{a}$.

Доказательство.

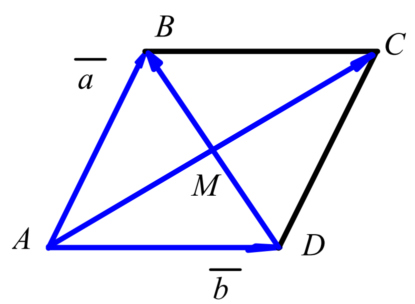
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\left(\frac{x}{|\bar{a}|}\right)^2+\left(\frac{y}{|\bar{a}|}\right)^2+\left(\frac{z}{|\bar{a}|}\right)^2=\frac{x^2}{|\bar{a}|^2}+\frac{y^2}{|\bar{a}|^2}+\frac{z^2}{|\bar{a}|^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{|\bar{a}|^2}=\frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}|^2}=1$$

§5. Нахождение координат середины отрезка

Координаты середины M отрезка AB, где $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, находятся по формулам

$$x_M=\frac{1}{2}\cdot(x_1+x_2),\quad y_M=\frac{1}{2}\cdot(y_1+y_2),\quad z_M=\frac{1}{2}\cdot(z_1+z_2).$$

Доказательство. Построим параллелограмм на векторах $\bar{a}=\overline{AB}$ и $\bar{b}=\overline{AD}$



Находим $\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{AM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$ - половина диагонали

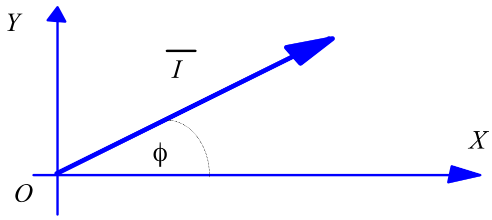
Радиус –вектор точки M равен $\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=$

$\overline{OA}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{OB}-\overline{OA}+\overline{OD}-\overline{OA}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)$

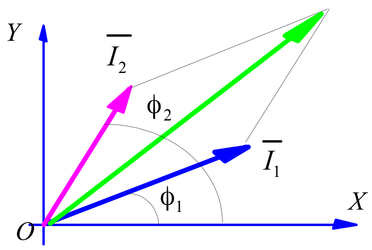
§6. Представление гармонических колебаний вектором

Гармоническим колебанием называется колебание, выражаемое формулой $I=A\cos(\omega t+\varphi)$. Для удобства понимания, принимаем, что I - это величина переменного тока в цепи, у которого амплитуда равна A, круговая частота равна ω и φ - начальная фаза.

Представим такой ток в виде вектора $\overline{I}$ на плоскости XOY



Оказывается при сложении двух токов $I_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$, $I_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ одной частоты получается ток $I=A\cos(\omega t+\varphi)$ векторное изображение которого находим сложением по закону параллелограмма изображающих векторов $\overline{I_1}$, $\overline{I_2}$

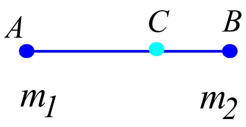


Отсюда, в частности, по теореме косинусов получаем закон сложения амплитуд $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

§7. Нахождение центра масс системы материальных точек

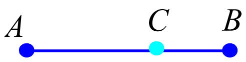
Центр масс C системы двух точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, имеющих массы m_1, m_2, находим по формуле $\overline{r_C} = \dfrac{m_1 \cdot \overline{r_A} + m_2 \cdot \overline{r_B}}{m_1 + m_2}$, где $\overline{r_A}$, $\overline{r_B}$, $\overline{r_C}$ - радиус-векторы точек A, B, C. Эта формула в проекциях:

$$x_C = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_C = \frac{m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2}{m_1 + m_2}$$



Эти формулы естественным образом обобщаются на случай n материальных точек.

§8. Деление отрезка AB точкой C в заданном отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$



Координаты точки C :

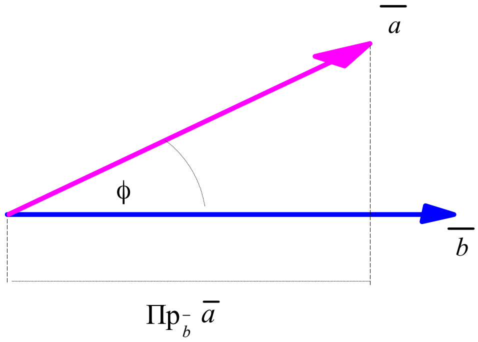
$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

Например, середина делит отрезок в отношении $\lambda = 1$, а центр масс системы двух точек - $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$. Медианы в треугольнике в точке пересечения делятся в отношении $\lambda = 2:1$, считая от вершины треугольника.

Лекция 3. Скалярное произведение векторов – свойства и приложения

§1. Проекция вектора на вектор или ось

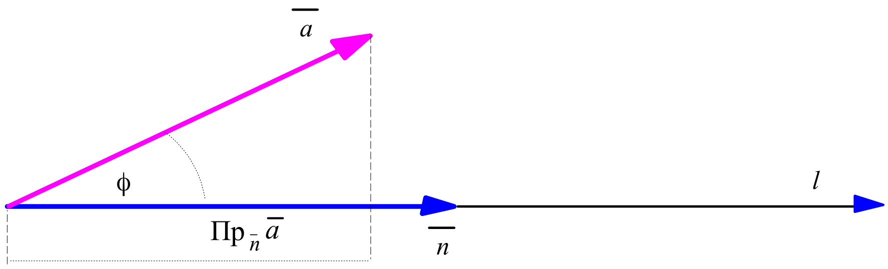
Проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется число, обозначаемое и равное $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$



Если $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, то проекция $Пр_{\overline{b}}\overline{a}>0$; для тупого угла $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ проекция отрицательна, $Пр_{\overline{b}}\overline{a}<0$

В случае, если угол прямой $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, то проекция равна нулю.

Проекцией вектора $\overline{a}$ на ось l с единичным вектором $\overline{n}$ называется число, обозначаемое и равное $Пр_l\overline{a}=Пр_{\overline{n}}\overline{a}=|\overline{a}|\cdot\cos\varphi$

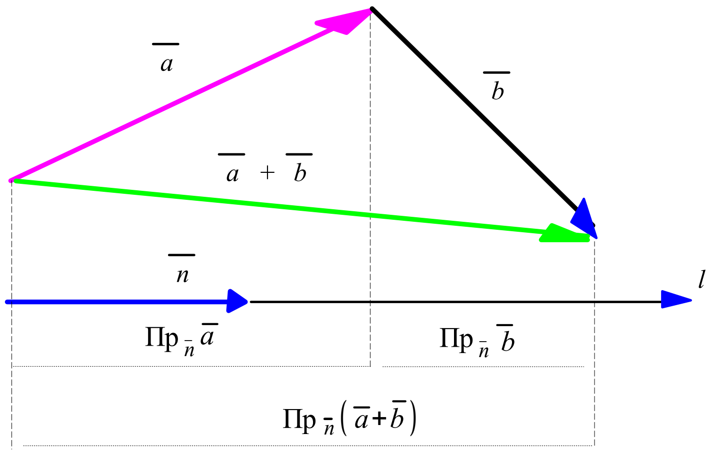


Свойства проекции

1) проекция суммы векторов равна сумме их проекций. $Пр_{\overline{n}}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=Пр_{\overline{n}}\overline{a}+Пр_{\overline{n}}\overline{b}$

2) константу можно выносить за знак проекции, $Пр_{\overline{n}}\left(\alpha\cdot\overline{a}\right)=\alpha\cdot Пр_{\overline{n}}\overline{a}$, $\alpha\in R$

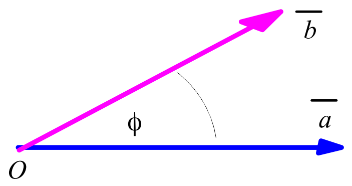
Проверим первое свойство. Выполним чертеж, из которого вытекает проверяемое равенство



Итак, свойство проекции в нестрогом смысле означает, что длина большего отрезка равна сумме длин его частей.

§2. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar a$ и $\bar b$ называется число, обозначаемое $\bar a\cdot\bar b$ или $(\bar a,\bar b)$ и равное $\bar a\cdot\bar b=|\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\cos\varphi$, где φ - угол между векторами.



Укажем основные свойства скалярного произведения

1) перестановочность (коммутативность), $\bar a\cdot\bar b=\bar b\cdot\bar a$;

Это свойство вытекает из определения скалярного произведения, $\bar b\cdot\bar a=|\bar b|\cdot|\bar a|\cdot\cos\varphi=\bar a\cdot\bar b$;

2) $(C\cdot\bar a)\cdot\bar b=C\cdot(\bar a\cdot\bar b)$ - константу C можно выносить за знак скалярного произведения;

3) $(\bar a+\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot\bar c+\bar b\cdot\bar c$ - распределительный закон

4) Признак перпендикулярности двух векторов $\bar a\perp\bar b\Leftrightarrow\bar a\cdot\bar b=0$

5) свойство скалярного квадрата $\bar a\cdot\bar a=\bar a^2=|\bar a|^2$

Выражения, содержащие скалярное произведение, преобразуются также, как выражения с обычным произведением.

6) Связь скалярного произведения с проекцией $\text{Пр}_{\bar b}\bar a = \dfrac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar b|}$

Эта формула вытекает из определения скалярного произведения и проекции

$$\frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar b|} = \frac{|\bar a| \cdot |\bar b| \cdot \cos\varphi}{|\bar b|} = |\bar a| \cdot \cos\varphi = \text{Пр}_{\bar b}\bar a$$

Докажем свойство 3 с помощью свойства 5.

$$\left(\bar a + \bar b\right) \cdot \bar c = |\bar c| \cdot \text{Пр}_{\bar c}\left(\bar a + \bar b\right) = |\bar c| \cdot \left(\text{Пр}_{\bar c}\bar a + \text{Пр}_{\bar c}\bar b\right) = |\bar c| \cdot \text{Пр}_{\bar c}\bar a + |\bar c| \cdot \text{Пр}_{\bar c}\bar b = \bar a \cdot \bar c + \bar b \cdot \bar c$$

§3. Скалярное произведение орт $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$

Скалярные квадраты орт равны единице, $\bar i^{\,2} = 1$, $\bar j^{\,2} = 1$, $\bar k^{\,2} = 1$,так они равны квадратам их модулей.

Скалярные произведение различных орт равны нулю, так как они перпендикулярны, т.е.

$$\bar i \cdot \bar j = 0, \quad \bar i \cdot \bar k = 0, \quad \bar j \cdot \bar k = 0$$

§4. Вычисление скалярного произведения векторов, заданных в проекциях

Теорема. Скалярное произведения векторов $\bar a = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar b = (x_2; y_2; z_2)$ равно сумме произведений одноименных проекций векторов, т.е. $\bar a \cdot \bar b = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Доказательство. Запишем вектора в виде линейной комбинации базисных векторов

$$\bar a = (x_1; y_1; z_1) = x_1 \cdot \bar i + y_1 \cdot \bar j + z_1 \cdot \bar k, \qquad \bar b = (x_2; y_2; z_2) = x_2 \cdot \bar i + y_2 \cdot \bar j + z_2 \cdot \bar k$$

Раскроем скобки

$$\bar a\cdot\bar b=\left(x_1\cdot\bar i+y_1\cdot\bar j+z_1\cdot\bar k\right)\cdot\left(x_2\cdot\bar i+y_2\cdot\bar j+z_2\cdot\bar k\right)=$$

$$\left(x_1\cdot x_2\cdot\bar i^2+x_1\cdot y_2\cdot\bar i\cdot\bar j+x_1\cdot z_2\cdot\bar i\cdot\bar k\right)+\left(y_1\cdot x_2\cdot\bar j\cdot\bar i+y_1\cdot y_2\cdot\bar j^2+y_1\cdot z_2\cdot\bar j\cdot\bar k\right)+$$

$$+\left(z_1\cdot x_2\cdot\bar k\cdot\bar i+z_1\cdot y_2\cdot\bar k\cdot\bar j+z_1\cdot z_2\cdot\bar k^2\right)$$

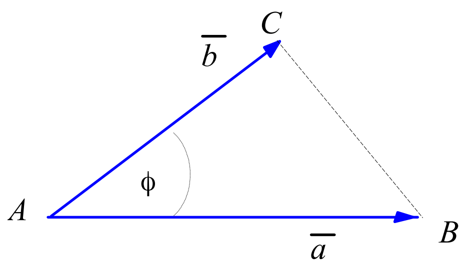
Применим таблицу скалярного умножения орт и получим $\bar a\cdot\bar b=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$

§5. Применение скалярного произведения

Пример. Найти угол φ при вершине A треугольника ΔABC.

Дано: $A(2;-1;3)$; $B(1;1;1)$; $C(0;0;5)$

Решение. Сделаем схематический чертеж.



1) Обозначим ребра треугольника как векторы : $\bar a=\overline{AB}$, $\bar b=\overline{AC}$

Пользуемся правилом: координаты вектора равны разности одноименных координат его конца и начала.

$\bar a=B(1;1;1)-A(2;-1;3)=(-1;2;-2)$;

$\bar b=C(0;0;5)-A(2;-1;3)=(-2;1;2)$;

Модуль вектора $\bar a=(x,y,z)$ определим по формуле $|\bar a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Вычислим длины ребер:

$|\bar a|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3$; $|\bar b|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$

2) Вычислим угол φ между векторами $\bar a$, $\bar b$ по формуле $\cos\varphi=\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar a|\cdot|\bar b|}$

Находим скалярное произведение векторов

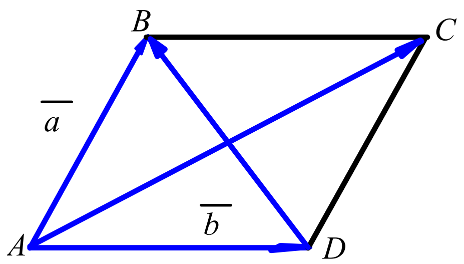
$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 = (-1)\cdot(-2)+2\cdot 1+(-2)\cdot 2 = 0$.

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \dfrac{0}{3\cdot 3} = 0$, $\varphi = \arccos 0 = 90$ град

Пример. Доказать формулу проекции $\text{Пр}_{\bar{n}}\bar{a} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, где $\bar{a} = (x, y, z)$, $\bar{n} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$ - орт.

Решение. Подставим в формулу проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{n}$, $\text{Пр}_{\bar{n}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}$ значения модуля $|\bar{n}| = 1$ и скалярного произведения $\bar{a}\cdot\bar{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$.

Теорема. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всего его сторон.



Доказательство. Изобразим параллелограмм . Обозначим вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AD}$ и скажем, что параллелограмм построен на этих векторах. Определим его диагонали $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\overline{DB} = \bar{a} - \bar{b}$

Применим свойство скалярного квадрата и вычислим

$$|\overline{AC}|^2 = \overline{AC}^2 = (\bar{a}+\bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 + 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} + |\bar{b}|^2$$

$$|\overline{DB}|^2 = \overline{DB}^2 = (\bar{a}-\bar{b})^2 = \bar{a}^2 - 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 - 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} + |\bar{b}|^2$$

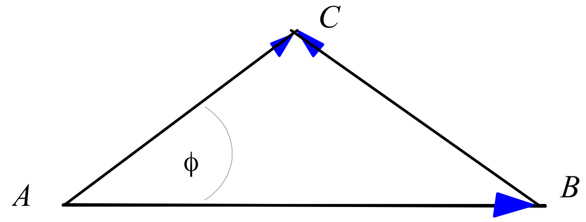
Находим сумму квадратов длин диагоналей параллелограмма

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{DB}|^2 = |\bar{a}|^2 + 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} + |\bar{b}|^2 + |\bar{a}|^2 - 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} + |\bar{b}|^2 = 2\cdot|\bar{a}|^2 + 2\cdot|\bar{b}|^2$$

Получили сумму квадратов длин всех сторон параллелограмма.

§6. Теорема косинусов

Дан треугольник ΔABC. Тогда верна формула $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\varphi$



Эта формула обобщает теорему Пифагора на случай произвольного треугольника.

Доказательство. Выразим вектор $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Находим скалярный квадраты обеих частей этого равенства $\overline{BC}^2 = \left(\overline{AC} - \overline{AB}\right)^2$

Преобразуем скалярный квадрат с помощью обычной формулы «квадрат разности» и применим свойство квадрата модуля вектора

$$BC^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 - 2\times\left(\overline{AC}, \overline{AB}\right) + \left(\overline{AB}\right)^2, \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times\left(\overline{AC}, \overline{AB}\right)$$

Подставим формулу скалярного произведения

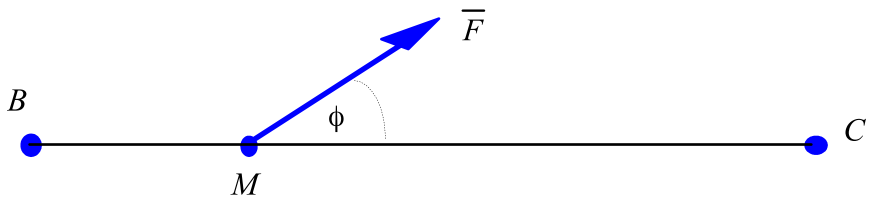
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AC \times AB \times \cos$$

Теорема доказана.

§7. Работа силы по перемещению

Скалярное произведение очень полезно не только при решении математических вопросов, но оно существенно применяется в прикладных и теоретических вопросах физики.

Пусть точка M движется по прямой из положения B в положение C под действием постоянной силы $\overline{F}$



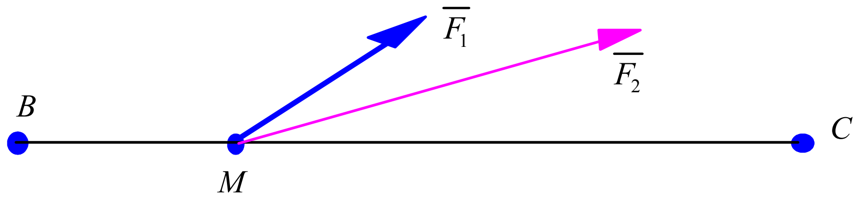
Работа силы $\overline{F}$ при перемещении $\overline{BC}$ равна скалярному произведению силы на вектор-перемещение $A=\overline{F}\times\overline{BC}$

Это определение согласуется со школьным. Пусть φ - угол, который сила образует с вектором – перемещения.

Тогда согласно школьному определению работа силы равна $A=F\times BC\times\cos\varphi$, но это есть определение скалярного произведения.

Можно поставить вопрос, какое из определений лучше. Ответить на этот вопрос поможет следующее утверждение.

Работа суммы сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, приложенных к точке M, равна сумме работ этих сил.



Работа суммы сил равна $A=\left(\overline{F_1}+\overline{F_2}\right)\times\overline{BC}=\overline{F_1}\times\overline{BC}+\overline{F_2}\times\overline{BC}$ - это сумма работ каждой силы в отдельности.

Выводы. Определение работы с помощью скалярного произведения полезно с теоретической точки зрения для выявления основных свойств физической величины.

Школьное определение работы силы полезно для практики, но бесполезно с теоретической точки зрения. Поэтому в качестве определения следует приять определение работы при помощи скалярного произведения.

Лекция 4. Векторное произведение векторов – свойства и приложения

§1. Определение векторного произведения

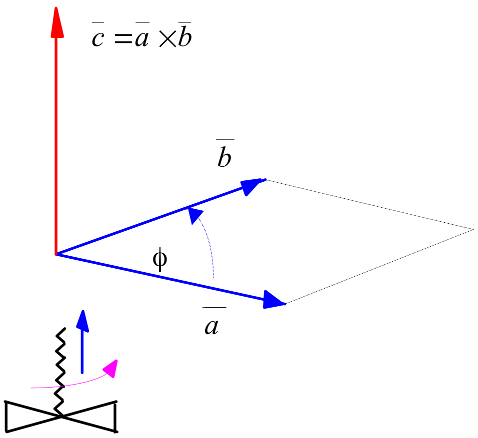
Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$, обозначаемый $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ или $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$ и определяемый следующими условиями:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

2) модуль $|\bar{c}|$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $|\bar{c}|=|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\times|\bar{b}|\sin\varphi$;

3) вектор $\bar{c}$ направлен так, что с вершины этого вектора кратчайший поворот φ от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ виден в положительном направлении

(т. е. против часовой стрелки).



Направление векторного произведения $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ можно определить по правилу правого буравчика. Если вектор $\bar{a}$ поворачивать как ручку буравчика в сторону вектора $\bar{b}$, то поступательное движение буравчика покажет направление $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

§2. Свойства векторного произведения

1.Выражения, содержащие векторное произведение, преобразуются по обычным правилам. Например, $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$, $(\alpha\times\bar{a})\times\bar{b}=\alpha\times(\bar{a}\times\bar{b})$.

Но есть исключения:

а) при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$.

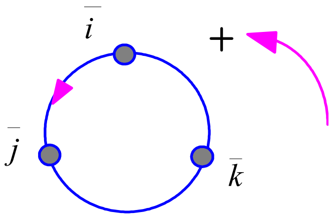
б) $\bar{a}\times\bar{a}=0$

2.Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$.

§3. Таблица умножения орт $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$

1. Векторное произведение одинаковых орт равно нулевому вектору. Например, $\bar j\times\bar j=0$

2. Векторное произведение разных орт равно третьему орту, взятому с определенным знаком, который определяется при помощи мнемонического правила. Расположим орты в положительном направлении обхода окружности.



Знак “плюс”, если от первого сомножителя мы передвигаемся ко второму по окружности в положительном направлении, иначе берем знак "минус". Например, $\bar i\times\bar j=+\bar k$, $\bar j\times\bar i=-\bar k$.

Пример. Выполнить действия: $2\bar i\cdot(\bar j\times\bar k)-3\bar j\cdot(\bar i\times\bar k)+4\bar k\times(\bar i\times\bar j)\times(\bar i+\bar j)\times\bar i$

Решение. Применим правило перемножения орт. Подставим $\bar j\times\bar k=\bar i$, $\bar i\times\bar k=-\bar j$, $\bar i\times\bar j=\bar k$

Отсюда

$$2\bar i\cdot(\bar j\times\bar k)-3\bar j\cdot(\bar i\times\bar k)+4\bar k\times(\bar i\times\bar j)\times(\bar i+\bar j)\times\bar i=2\bar i\cdot\bar i-3\bar j\cdot(-\bar j)+4\bar k\cdot\bar k+\bar k\times\bar k\cdot\bar i=$$

$2\cdot1-3\cdot1+4\cdot1+0=3$. Ответ. 3.

§4. Вычисление векторного произведения векторов, заданных в проекциях

Векторное произведение вычисляется по формуле

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},\ \text{где}\ \bar a=(x_1;y_1;z_1),\ \bar b=(x_2;y_2;z_2).$$

Этот символический определитель, составленный из векторов и чисел, раскрываем по первой строке.

Пример. Вычислить векторное произведение $\bar a\times\bar b$, если $\bar a=(2;1;0)$, $\bar b=(1;3;1)$

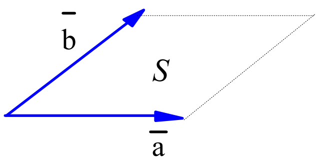
Решение. Применяем формулу

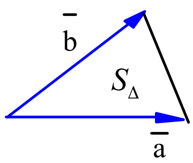
$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\bar i\times\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\bar j\times\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\bar k\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=\bar i\times 1-\bar j\times 2+\bar k\times 5$$

Ответ. $\bar a\times\bar b=(1;-2;5)$

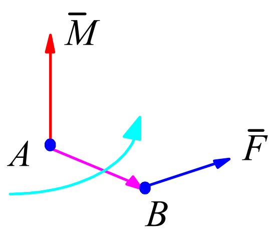
§5. Приложения векторного произведения

1. Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$, равна $S=|\bar a\times\bar b|$, площадь треугольника - $S_\Delta=\frac{1}{2}|\bar a\times\bar b|$



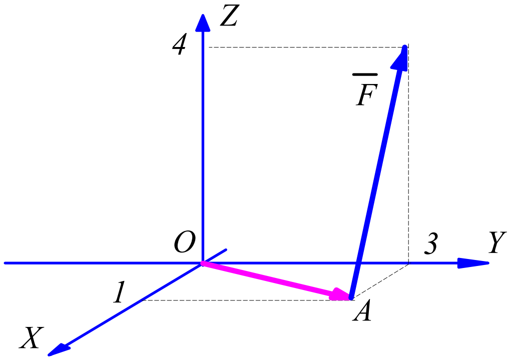


2.Момент $\bar M=\bar M_A(\bar F)$ силы $\bar F$, приложенной к точке B, относительно точки A вычисляется по формуле $M=\bar r\times\bar F$, где $\bar r=\overline{AB}$ вектор-рычаг силы $\bar F$. Направление силы $\bar F$ можно определить по правилу правого буравчика.



Пример. Найти момент $\bar M=\bar M_O(\bar F)$ силы $\bar F=(-1;0;4)$ относительно начала координат O, если известно, что сила $\bar F$ приложена к точке $A(1;3;0)$.

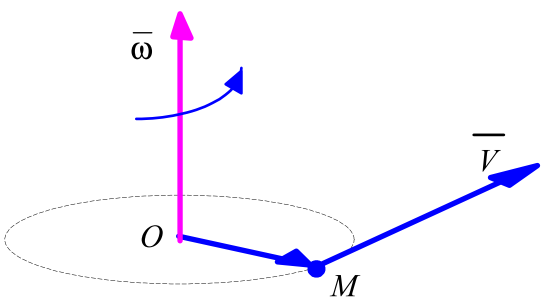
Решение. Сделаем чертеж. Построим вектор-рычаг $\overline{OA}=(1;3;0)$ и силу $\overline{F}=(-1;0;4)$, приложенную $A(1;3;0)$.



Находим момент силы согласно формуле

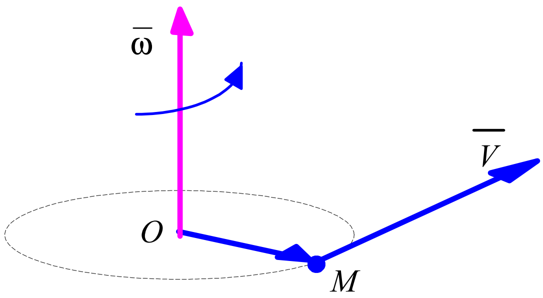
$$\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}\times\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}-\bar{j}\times\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}+\bar{k}\times\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=12\times\bar{i}-4\times\bar{j}+3\times\bar{k}=(12;-4;3)$$

3.Линейная скорость $\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{OM}$ вращения точки по окружности. Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ точки перпендикулярен к плоскости окружности и его направление определяется по правилу правого буравчика при вращении его рукоятки в сторону скорости $\overline{V}$.



Пример. Точка M движется по окружности с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}=2\times\bar{i}+3\times\bar{j}$ вокруг оси, проходящей через начало координат. Найти скорость $\overline{V}$ этой точки в момент, когда $x=1$, $y=-2$, $z=1$.

Решение. Применим формулу $\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{OM}$, где $\overline{OM}=(1;-2;1)$ - радиус-вектор точки M.

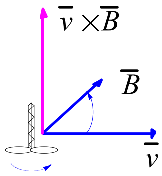


Запишем векторное произведение:

$$\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{OM}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\times\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\times\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\times\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\times\bar{i}-2\times\bar{j}-7\times\bar{k}=(3;-2;-7)$$

4.Сила Лоренца $\overline{F}=Q\times(\bar{v}\times\overline{B})$ действует в магнитном поле $\overline{B}$ на движущийся заряд Q со скоростью $\bar{v}$.

Укажем направление силы Лоренца в случае положительного заряда. Векторы $\overline{F}$, $\bar{v}\times\overline{B}$ имеют одинаковое направление, так отличаются на положительный множитель Q. Направление вектора $\bar{v}\times\overline{B}$ находим по правилу правого буравчика: поворачиваем первый вектор $\bar{v}$ в кратчайшем направлении к вектору $\overline{B}$. Поступательное движение буравчика покажет направление векторного произведения.



Лекция 5. Смешанное произведение векторов – свойства и приложения

§1. Определение смешанного произведения

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, обозначаемое $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ и равное $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

Эту запись понимается так. Сначала находим векторное произведение $\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b}$, а затем скалярно перемножаем вектора $\bar{n}$, $\bar{c}$. Поэтому смешанное произведение называется векторно-скалярным произведением.

Смешанное произведение векторов, заданных проекциями, вычисляется по формуле:

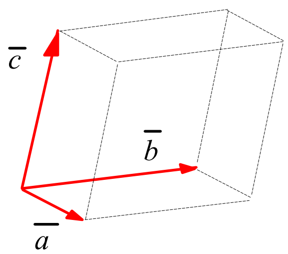
$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Строки определителя - это проекции перемножаемых векторов $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\bar{c}=(x_3,y_3,z_3)$

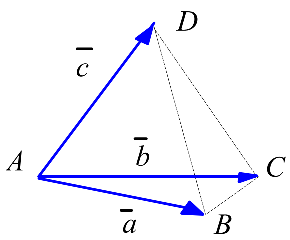
Выражения, содержащие смешанное произведение, преобразуются по обычным правилам. Однако есть исключение - ” при перестановке местами множителей следует менять знак смешанного произведения”. Это означает, что при перестановке местами строк определителя у него меняется знак.

§2. Применения смешанного произведения

1.Геометрический смысл смешанного произведения. Объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, с точностью до знака равен смешанному произведению, т.е. $V=\pm(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$. Знак не учитывается, т.к. $V\geq 0$



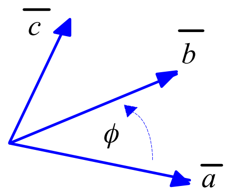
2.Объем V треугольной пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен $V=\pm\frac{1}{6}(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.



3.Признак компланарности трех векторов:

векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$.

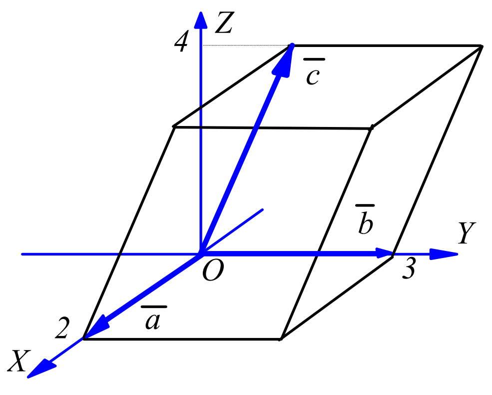
4.Тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется правой, если с вершины вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ виден в положительном направлении. В противном случае тройка векторов называется левой. В случае правой тройки векторов смешанное произведение положительно, т.е. $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})>0$, а для левой – отрицательно.



§3. Типовые примеры

Пример 1. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=2\times\bar{i}$, $\bar{b}=3\times\bar{j}$, $\bar{c}=(0;1;4)$. Правой или левой будет связка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?

Решение. Построим вектора и параллелепипед с ребрами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Объем V параллелепипеда определим с помощью геометрического смысла смешанного произведения: $V=\pm(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.



Вычислим смешанное произведение с помощью определителя, составленного из проекций перемножаемых векторов:

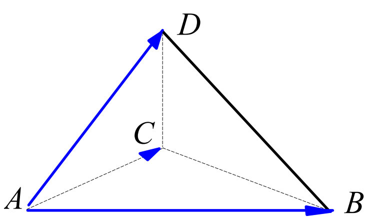
$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=24$$

Итак, $V=24$. Связка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая, ибо $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})>0$. Заметим, это означает, что с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ виден в положительном направлении (против часовой стрелке).

Объем можно вычислить по обычной формуле $V = S\cdot h = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

Пример 2. Найти объем пирамиды $ABCD$, где $A(1;2;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(3;1;1)$, $D(5;4;4)$.

Решение. Сделаем схематический чертеж.



Введем вектора: $\bar{a}=\overline{AB}=B(-1;0;2)-A(1;2;1)=(-2;-2;1)$,

$\bar{b}=\overline{AC}=C(3;1;1)-A(1;2;1)=(2;-1;0)$,

$\bar{c}=\overline{AD}=D(5;4;4)-A(1;2;1)=(4;2;3)$.

Тогда объем пирамиды равен $V=\pm\frac{1}{6}(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-(-2)\cdot 3-(-2)\cdot 6+1\cdot 8=26$$

$V=\pm\frac{1}{6}(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\Rightarrow V=\frac{1}{6}\cdot 26=\frac{13}{3}$. Ответ: $V=\frac{13}{3}$.

Пример 3. Доказать, что точки $O(0;0;0)$, $A(1;2;0)$, $B(2;-1;5)$, $C(3;1;5)$ компланарны.

Решение. Четыре точки O,A,B,C лежат в одной плоскости (т.е. компланарны) $\Leftrightarrow$ три вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ лежат в одной плоскости, т.е. их смешанное произведение равно нулю (признак компланарности).

Векторы $\overline{OA}=(1;2;0)$, $\overline{OB}=(2;-1;5)$, $\overline{OC}=(3;1;5)$

Вычислим смешанное произведение

$$\left(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 5\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & 5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 5\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-10)-2\cdot(-5)+0=0$$

Пример 4. Найти проекцию вектора $\overline{n}=\overline{a}\times\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$, если $\overline{a}=(1;1;0)$, $\overline{b}=(2;0;1)$, $\overline{c}=(1;1;2)$.

Решение. Применим формулу проекции вектора на вектор

$$\text{Пр}_{\overline{c}}\overline{n}=\frac{\overline{n}\cdot\overline{c}}{|\overline{c}|}=\frac{\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}}{|\overline{c}|}.$$

Применим определение смешанного произведения $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$.

$$\text{Пр}_{\overline{c}}\overline{n}=\frac{\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}}{|\overline{c}|}=\frac{\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)}{|\overline{c}|}.$$

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot 3+0=-4$$

Модуль $|\overline{c}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$, проекции $\text{Пр}_{\overline{c}}\overline{n}=-\frac{4}{\sqrt{6}}$. Ответ: $\text{Пр}_{\overline{c}}\overline{n}=-\frac{4}{\sqrt{6}}$.

§4. Примерные тесты по теме «Векторная алгебра»

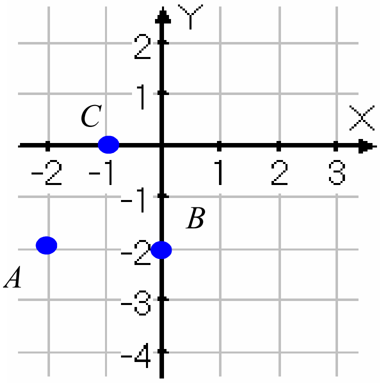
1.Вычислить $\overline{a}+\overline{b}$, если $\overline{a}=3\cdot\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=-4\cdot\overline{i}+3\cdot\overline{j}-2\cdot\overline{k}$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$-\overline{i}+4\cdot\overline{j}-3\cdot\overline{k}$	$-\overline{i}+2\cdot\overline{j}+2\cdot\overline{k}$	$-\overline{i}+4\cdot\overline{j}+3\cdot\overline{k}$	$7\cdot\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$

2.Какой вектор $\overline{n}$ является ортом вектора $\overline{a}=(2;-2;1)$?

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$\overline{n}=\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$	$\overline{n}=\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$	$\overline{n}=(0;0;1)$	$\overline{n}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{1}\right)$

3.Даны точки A,B,C (см.чертеж). Вычислить и построить вектор $\overline{c}=2\cdot\overline{AB}-\overline{BC}$.



Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$(5;1)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;-2)$

4.Найти значение k, при котором векторы $\bar{a}=(6;-10;-2)$, $\bar{b}=(3;k;-1)$ коллинеарны.

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
15	-5	3	-15

5.Указать точку $M(x;y)$, для которой векторы $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ коллинеарны, если $A(2;-3)$, $B(7;6)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$(57;93)$	$(57;95)$	$(57;97)$	$(57;96)$

6.Даны три последовательные вершины A,B,C параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D, если $A(2;-1;5)$, $B(1;2;-3)$, $C(4;1;2)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$D(5;-2;10)$	$D(-1;-2;4)$	$D(2;-4;4)$	$D(6;-2;4)$

7.Вектор $\bar{n}$ образует углы 60^0 и 45^0, 45^0 с осью абсцисс, ординат и осью аппликат соответственно. Вычислить сумму квадратов направляющих косинусов этого вектора.

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
Такого вектора $\bar{n}$ не существует.	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

8.Найти модуль вектора $\overline{AB}$, если $A(1;3;2)$, $B(4;3;-2)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
3	6	10	5

9.Расстояние между точками $A(1;6)$ и $B(k;2)$ равно 5 при k равном

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
1	6	4	2

10.Вычислить скалярное произведение $(\bar{a},\bar{b})$, если $\bar{b}=(1;-2;-6)$, $\bar{b}=(3;4;-1)$.

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$(\bar{a},\bar{b})=0$	$(\bar{a},\bar{b})=5$	$(\bar{a},\bar{b})=1$	$(\bar{a},\bar{b})=(3;-8;6)$

11.Вычислить скалярное произведение $(\overline{AB},\overline{AC})$, если $A(2;1;3)$, $B(5;-2;3)$, $C(4;1;1)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$(\overline{AB},\overline{AC})=0$	$(\overline{AB},\overline{AC})=(6;0;0)$	$(\overline{AB},\overline{AC})=6$	$(\overline{AB},\overline{AC})=-2$

12.Найти угол φ между векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, если известно скалярное произведение $(\bar{a},\bar{b})=\sqrt{8}$ и модули $|\bar{a}|=\sqrt{2}$, $|\bar{b}|=4$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$\varphi=\frac{\pi}{6}$	$\varphi=\frac{\pi}{4}$	$\varphi=\frac{\pi}{2}$	$\varphi=\frac{\pi}{3}$

13.Вычислить косинус угла $\alpha=\angle BAC$, если $A(4;3)$, $B(0;1)$, $C(-2;4)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$\cos\alpha=-1$	$\cos\alpha=0$	$\cos\alpha=0,81$	$\cos\alpha=-0,34$

14.При каком значении λ векторы $\bar{a}=(\lambda;7;1)$, $\bar{b}=(-2;1;3)$ перпендикулярны:

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
5	2	0	-1

15.Вычислить проекцию вектора $\bar{a}=(2;5;7)$ на вектор $\bar{b}=(-2;1;2)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
-1	1	5	3

16.Вычислить работу силы $\bar{F}=\bar{i}+4\times\bar{j}+3\bar{k}$, приложенной к точке $M(x,y,z)$, при перемещении ее по прямой из положения $A(1;0;1)$ в положение $B(3;1;-5)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
-5	-17	-19	-12

17.Указать верное утверждение для векторов $\bar{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\bar{b}=(x_2;y_2;z_2)$

Ответ 1	$(\bar{a}+\bar{b})^2=\lvert\bar{a}\rvert^2+2\times(\bar{a},\bar{b})+\lvert\bar{b}\rvert^2$
Ответ 2	$\bar{a}\,\vert\vert\,\bar{b}\Leftrightarrow\frac{x_1+y_1+z_1}{x_2+y_2+z_2}=1$
Ответ 3	$\lvert\bar{a}+\bar{b}\rvert=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$
Ответ 4	Вектор $\bar{a}-\bar{b}$ находим по правилу параллелограмма

18.Вычислить векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$, если $\bar{a}=(1;2;4)$, $\bar{b}=(2;1;-3)$

Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
$(2;2;-12)$	$(-10;-11;-3)$	$(-10;11;-3)$	-8

19.Зная векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}=7\times\bar{i}-3\times\bar{j}+\sqrt{6}\times\bar{k}$, вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
4	$\sqrt{6}$	8	5

20.Найти площадь треугольника ABC,если : $A(1;4)$; $B(2;-3)$; $C(-1;6)$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
11	8	7	6

21.Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если : $A(3;1;-1)$; $B(5;4;3)$; $C(8;7;7)$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
4	5	2	3

22.Найти значение $7\times\cos\alpha$ для угла α, образованного вектором $\overline{AB}\times\overline{AC}$ с осью абсцисс, если : $A(2;0;0)$; $B(3;3;4)$; $C(4;9;10)$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
4	-6	6	-4

23.Вычислить смешанное произведение векторов $(\overline{AB},\overline{AC},\overline{N})$, если: $\overline{N}=(1;0;0)$, $A(1;0;0)$; $B(2;3;4)$; $C(2;2;2)$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
2	5	-2	4

24.Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{N}$, если : $\overline{N}=(1;0;0)$, $A(0;1;1)$; $B(1;5;9)$; $C(1;4;5)$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
5	-8	8	-5

Ответы для тестов

Вопрос №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ №	1	1	4	2	4	1	1	4	3	3	3	4
Вопрос №	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Ответ №	3	1	3	4	1	3	3	4	2	2	3	3

Библиографический список

1. Письменный Л. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Л. Т. Письменный. – Москва : Айрис Пресс, 2006. – 608 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии-М: Наука,1984.

3. Щипачев, В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Щипачев.– М. : Высш. шк., 2001.– 304 с.

4. В.П.Белкин. Персональный сайт. http://bvp1234.ucoz.ru

Список дополнительной литературы

1. Щипачев, В.С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Щипачев.– М. : Высш. шк., 1998.– 479 с.

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1 / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.– М. : Высш. шк., 1999.– 304 с.

3. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра.-М.Наука,1983.

4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов.М.:Наука,1981.

Учебное издание

Составитель

Белкин Валерий Павлович

Векторная алгебра

Методические указания для практических занятий

Напечатано в полном соответствии с авторским оригиналом

Подписано в печать xx.xx.2014г.

Формат бумаги 60х84 1/16. Бумага писчая. Печать офсетная.

Усл.-печ. 0,64 л.. Уч.-изд. 0,71. л. Тираж 5 экз. Заказ .

Сибирский государственный индустриальный университет

654007, г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42.

Типография СибГИУ