Лекция 1. Теория вероятностей

§1.Основные понятия. Эксперимент. Частота. Вероятность.

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений.

Случайные события – это события, которые при одних и тех же условиях иногда происходят, а иногда нет.

Экспериментом называется совокупность условий σ, при выполнении которых ставится цель - наблюдать некоторое случайное событие A.

Испытанием назовем одноразовое проведение эксперимента.

Пусть испытания проводились n раз , а интересующее нас событие появилось m раз. Тогда m называется частотой, а отношение $f=\frac{m}{n}$ - относительной частотой появления события A.

Относительная частота колеблется около определенного числа $P(A)$, которое характеризует данное случайное событие. Это число $P(A)$ называют вероятностью события A.

Можно отметить свойства:

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(A) \approx \frac{m}{n}$ (свойство устойчивости относительной частоты)

Вероятность $P(A)$ - это мера случайности события.

Например, бросается монета. Событие A выпал «Герб» . Его вероятность равна $P(A)=\frac{1}{2}$. Однако относительная частота $f=\frac{m}{n}$ может отклонять от этого значения, но она будет колебаться относительно этого значения.

§2. События. Алгебра событий

Достоверное событие-событие, которое всегда происходит. Его вероятность равна единице.

Невозможное событие - событие, которое не происходит никогда, т.е. $P(A)=0$.

Противоположное событие для события A обозначается $\overline{A}$. Оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A

Сумма событий A,B обозначается $A+B$ и означает, что произошло событие A или событие B.

Произведение событий A,B обозначается AB и означает, что при испытании произошли оба события A,B.

Сумма и произведение событий обладают обычными свойствами:

1) $A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$

2) $AB=BA$; $(AB)C=A(BC)$

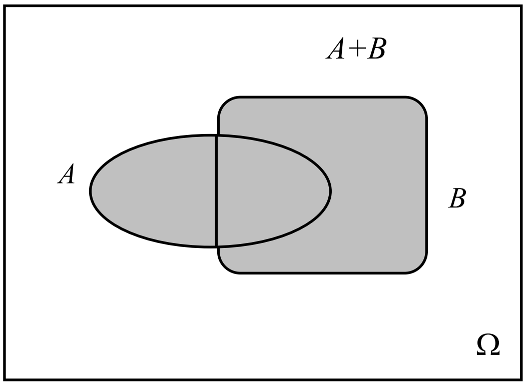
3) $A(B+C)=AB+AC$

Имеются также особенные свойства, например:

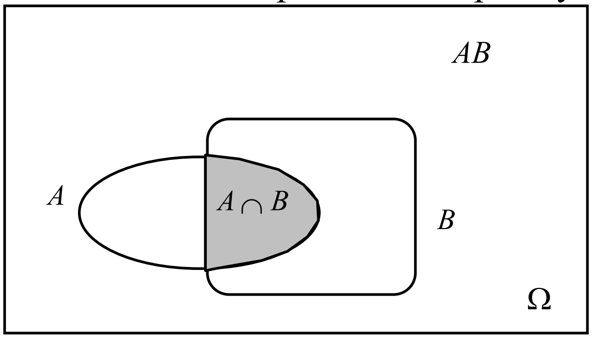
$A+A=A$, $AA=A$; $\overline{\overline{A}}=A$; $A\overline{A}=0$; $A+\overline{A}=1$ $\overline{(A+B)}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

Диаграмма Венна – это графическое изображение событий на плоскости в виде областей. Скажем, что событие A произошло, если точка, брошенная наудачу на плоскость, попала в область A.

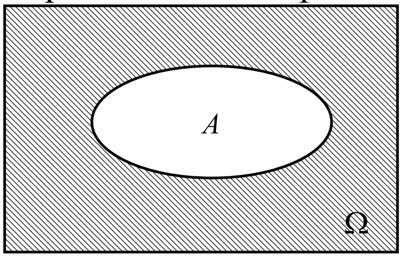
Изобразим внутри некоторой области Ω сумму событий $A+B$ как объединение $A\cup B$ областей. Это объединение называется диаграммой Венна.



Аналогично изображаем диаграмму Венна произведение событий

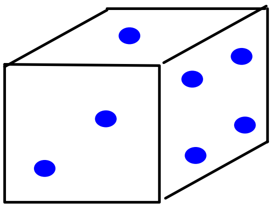


Отрицание $\overline{A}$ изображается дополнением к области A



§3. Классическая вероятность события

В каждом эксперимента, как правило, имеются самые простейшие события, которые нельзя разложить в сумму или произведение, отрицание других боле простых событий. Например, при броске игральной кости на верхней грани может появиться простейшие (элементарные) события - число очков от 1 до 6.



Пространство Ω элементарных событий (кратко ПЭС)– это множество всех простейших событий эксперимента. Для игрального кубика ПЭС равно множеству $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Если простейшее событие наблюдается при испытании, то оно называется исходом.

Допустим, что выполнен принцип: все простейшие события равновероятны, т.е ни одно из них не имеет преимуществ перед другими простейшими событиями.

Классическая вероятность события A это число , равное $P(A)=\dfrac{m}{n}$, где n - число всевозможных исходов, а m - число всех исходов, благоприятствующих появлению события A.

Пример 1. Вычислить, что при броске игральной кости на верхней грани появится четное число очков.

Решение. Вероятностное пространство $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Число всевозможных исходов равно $n=6$. Если кость правильная, то все исходы равновероятны.

Проверяемое событие A - выпало четное число очков, т.е. 2,4 или 6. Эти исходы благоприятствую появлении события A. Поясним: если выпала двойка, то это значит, что выпало четное число очков.

Число исходов благоприятствующих появлению события A равно $m=3$

Вероятность события находим по формуле классической вероятности, так как выполнен принцип равновероятности всех возможных исходов.

§4. Комбинаторика

Комбинаторика – это раздел математики, методами которого подсчитывается число вариантов или случаев в соответствии с заданными условиями.

Сочетание - это любой неупорядоченный набор, состоящий из k элементов некоторого множества.

В частности, сочетание это любое подмножество множества, состоящего из n элементов.

Число сочетаний рассчитываем по формуле $C_n^k=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$.

Например, $C_4^3=\dfrac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4$. Это означает, что в множестве $\{1,2,3,4\}$ имеет 4 подмножества, состоящих из трех элементов.

Размещение - это любой упорядоченный набор, состоящий из k элементов некоторого множества.

Число размещений равно $A_n^k=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Например, размещения элементов множества $\{1,2,3,4\}$ будут такими $(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(3,1,4)$

Перестановка – это размещение n элементов, взятых из $n-$го множества.

Число перестановок равно факториалу $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$

§5. Решение типовых задач

Пример 1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится "герб". Построить пространство элементарных событий.

Решение. Простейший исходы (Герб; Герб), (Герб; Решка), (Решка; Герб), (Решка; Решка). Эти исходы образуют пространство элементарных событий. Число всех исходов $n = 4$. Обозначим событие A - "при двух бросках появится хотя бы один раз появится "герб ". Применим формулу классической вероятности

$P(A) = \dfrac{m}{n}$, где $m = 3$ - число исходов, благоприятствующих появлению событию A.

Пример 2. Найти вероятность того, что при двух бросках игральной кости выпадет число очков, не большее 4 (событие A).

Решение. Простейший исходы имеют общий вид $(x; y)$, где $x, y \in \{1,2,\ldots,6\}$. Здесь x-число очков, выпавших при первом броске кости, а y - при втором броске. Число всевозможных исходов равно $n = 36$.

Событие A математически запишется при помощи неравенства $x + y \le 4$. Укажем те исходы , которые подходят этому неравенству: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$. Число исходов, благоприятствующих появлению события A равно $m = 4$.

Поэтому классическая вероятность равна $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{5}{36} \approx 0{,}14$.

Пример 4. В урне находится 3 белых и 2 черных шара. Из урны наудачу извлекают 2 шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары окажутся белыми.

Решение. Простейший исход - это сочетание, т.е. неупорядоченный набор двух шаров, взятых из множества 5 шаров.

Число всевозможных исходов равно числу сочетаний $n = C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$

Обозначим событие A - извлеченные шары окажутся белыми. Число исходов , благоприятствующих появлению событию A, равно числу сочетаний $m = C_3^2 = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$

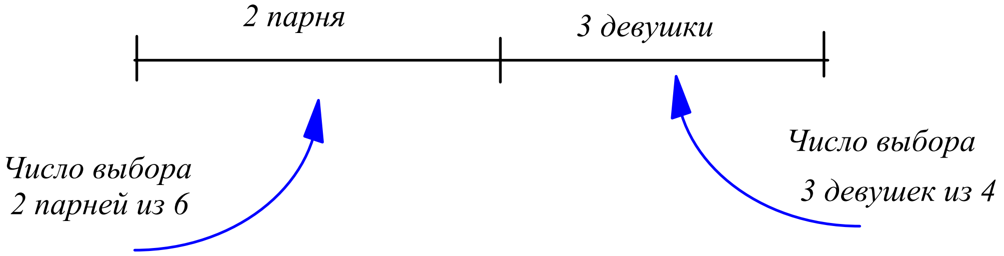
Вероятность $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3 \approx 0{,}14$.

Пример 5. В группе 10 студентов , из которых 6 парней и 4 девушки. Какова вероятность того, что среди 5 опоздавших на занятие только два парня (событие A)?

Решение. Исход – это сочетание – неупорядоченный набор пяти человек из 10 студентов. Число всевозможных исходов равно $n = C_{10}^5 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$

Исход, благоприятствующий появлению событию A, – это множество, состоящее из двух парней и трех девушек. Представим исход в виде отрезка, у которого левая часть изображает число парней, опоздавших на занятие, а правая часть отрезка - число девушек, опоздавших на занятие.

Графическое изображение исхода



Число вариантов выбора 2-х парней из 6 равно $m_1 = C_6^2$, а для девушек подобное число вариантов равно $m_2 = C_4^3$. Так как варианты выбора парней не зависят от выбора девушек, то следует применить правило перемножения вариантов, т.е. $m = m_1 \cdot m_2 = C_6^2 \cdot C_4^3$

Применим формулу классической вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \dfrac{15 \cdot 4}{252} \approx 0{,}24$.

§6. Основные теоремы о вероятности

Теорема. Вероятность противоположного события $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Обозначим событие B/A и назовем его условным, если происходит событие B при условии, что событие A произошло. Вероятность $P(B/A)$ называется условной вероятностью.

Теорема умножения вероятностей произвольных событий. Справедливо равенство $P(AB) = P(A)P(B/A)$

События A, B независимы, если вероятность одного события не зависит от того, произошло или не произошло другое, т.е. $P(B/A) = P(B)$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Пусть A, B - независимые события. Тогда верно равенство $P(AB) = P(A)P(B)$

Теорема сложения вероятностей произвольных событий.

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

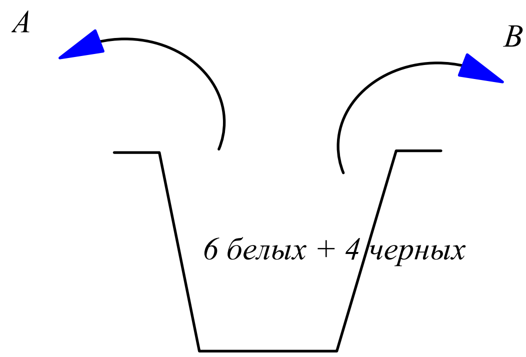
События A, B называются не совместными, если одновременное появление их невозможно, т.е. событие AB не возможно и вероятность $P(AB) = 0$.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

Пример 1. В урне находится 6 белых и 4 черных шара. Из урны наудачу извлекают по очереди два шара . Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров два белых шара

Решение. Обозначим события: A - первый извлеченный шар- белый; B - второй извлеченный шар- белый.



Событие AB - оба извлеченных шара белые. Вероятность $P(A)=\frac{6}{10}$. Условная вероятность второго события $P(B/A)=\frac{5}{9}$.

Применяем теорему умножения вероятностей

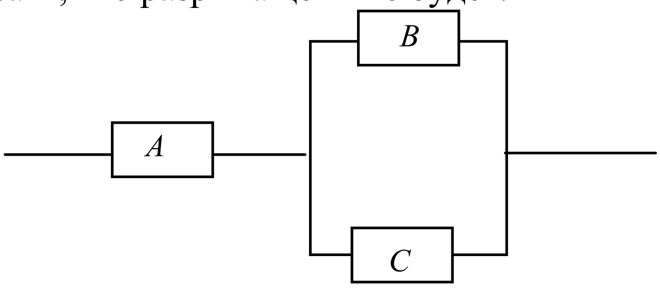
$$P(AB)=P(A)P(B/A)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

Пример 2. Имеется две урны. В первой из них находится 6 белых и 4 черных шара, а во второй 2 белых и 8 черных шаров. Из каждой урны извлекается по шару. Какова вероятность что они оба белые?

Решение. Обозначим события: A - шар, извлеченный из 1-ой урны, - белый; B - шар, извлеченный из 1-ой урны - белый. Эти события не зависимы. Поэтому

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{5}$$

Пример 3. Электрическая схема состоит из элементов A,B,C. Выразить тот факт, что разрыва цепи не будет.



Решение. Обозначим события: A,B,C - элементы A,B,C соответственно работают нормально. Чтобы разрыва цепи не было при параллельном соединении элементов необходимо, что работал хотя бы один элемент, т.е. выполнено событие $B+C$. При последовательном соединении элементов должны работать одновременно оба элемента. Поэтому верно событие $A(B+C)$

Пример 4. Вычислить вероятность разрыва цепи для схемы из примера 5, если вероятности нормальной работы каждого элемента равны 0,5.

Решение. Событие $A(B+C)$ означает, что цепь не имеет разрыва . Применим формулу произведения вероятностей независимых событий.

$$P(A(B+C))=P(A)P(B+C)$$

Далее применим формулу суммы вероятностей событий.

$$P(A(B+C))=P(A)(P(B)+P(C)-P(BC))=P(A)(P(B)+P(C)-P(B)\cdot P(C))=$$

$$0,5(0,5+0,5-0,5\cdot 0,5)=0,375$$

§7. Формула полной вероятности

Полной группой событий пространства элементарных событий называется совокупность событий H_1, H_2,…, H_n, который:

1)попарно не совместны, т.е. $H_iH_j = 0$ при $i \neq j$;

2) их сумма – достоверное событие, т.е. $\sum H_i = 1$

События H_i можно называть гипотезами.

Формула полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)$.

Пример 1. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго автомата. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй - 80%. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь отличного качества.

Решение. Обозначим гипотезы:

H_1 - деталь произведена первым автоматом; H_2 - деталь произведена вторым автоматом.

События H_1, H_2 образуют полную группу событий.

Вероятности этих гипотез $P(H_1) = \frac{2}{3}$; $P(H_2) = \frac{1}{3}$

Событие A состоит в том, что наудачу взятая с конвейера деталь, оказалась отличного качества.

Условные вероятности этого события $P(A/H_1) = 0{,}6$; $P(A/H_2) = 0{,}8$

Вероятность того, что взятая деталь отличного качества, находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) \Rightarrow P(A) = 0{,}6 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}53$$

§8. Формула Байеса

Эта формула позволяет оценить вероятность , например, гипотезы H_1, при условии , что событие A произошло. Условная вероятность гипотезы запишется так $P(H_1/A)$.

Формула Байеса для полной группы событий H_1, H_2:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_1)P(A/H_2)}$$

Пример 1.

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Первый автомат производит 70% продукции, а второй -30%. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй - 80%. Наудачу взятая с конвейера деталь, оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим гипотезы:

H_1 - деталь произведена первым автоматом; H_2 - деталь произведена вторым автоматом.

События H_1, H_2 образуют полную группу событий.

Вероятности этих гипотез $P(H_1)=0,7$; $P(H_2)=0,3$

Событие A состоит в том, что наудачу взятая с конвейера деталь, оказалась отличного качества.

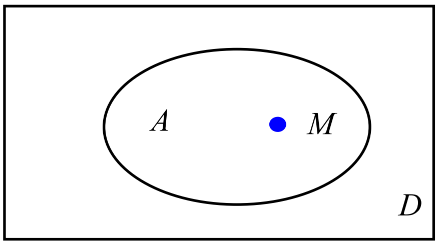
Условные вероятности этого события $P(A/H_1)=0,6$; $P(A/H_2)=0,8$

Вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом , это вероятность условного события H_1/A . Ее находим по формуле Байеса :

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)} \Rightarrow P(H_1/A)=\frac{0,7\cdot 0,6}{0,7\cdot 0,6+0,3\cdot 0,8}=0,64$$

§9. Геометрическая вероятность

В область D бросается наудачу точка M. Будем считать, что точка может попасть с равной вероятностью в любую часть (например, единичной площади) области D.

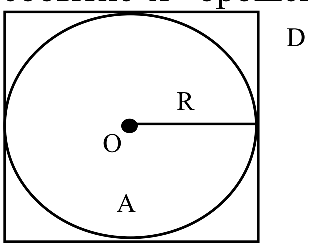


Вероятность того, что эта точка попадет в область $A \subseteq D$, равна отношению мер этих областей, т.е. $P(M \in A)=\dfrac{m(A)}{m(D)}$.

Мера $m(A)$ множества A -это длина. площадь или объем фигуры.

Пример 1. Найти вероятность того, что брошенная в квадрат точка окажется внутри вписанного в этот квадрат круга, если ее любое положение в квадрате равновозможно.

Решение. Попадание в любую точку квадрата равновероятно. Обозначим событие A - брошенная наудачу точка M внутрь квадрата, попадает в круг.



В нашем случае область D - это квадрат площади $m(D)=a^2$, где a - сторона квадрата. Область A - это круг вписанный в этот квадрат . Его радиус $R=\frac{1}{2}\cdot a$, площадь S

$$m(A)=\pi\cdot R^2=\frac{1}{4}\pi\cdot a^2,.$$

Находим вероятность $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(D)}=\dfrac{\frac{1}{4}\pi\cdot a^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}\pi$

§10. Независимые испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли

Испытания называем независимыми, если вероятность события A не зависит от того какие результаты были в других испытаниях.

Простейшая задача, относящаяся к схеме Бернулли, состоит в определении вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A наступит k раз $(0 \le k \le n)$.

Итак, согласно **схеме Бернулли** производятся n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A с вероятностью $p = P(A)$.

Вероятность противоположного события равна $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Обозначим вероятность того, что событие A появится ровно k раз, через $p_n(k)$.

Справедлива **формула Бернулли** $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

Наивероятнейшее число k_0 появления события A находим как целое число, принадлежащее промежутку $np - q \le k_0 \le np + p$. Если границы этого отрезка - целые числа, то они равновероятны и каждое из них может быть принято в качестве k_0.

Пример 1. Монету подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что выпадет ровно 3 раза «герб».

Решение. Применим схему Бернулли. Испытание- это бросок монеты. Производятся $n = 5$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A (выпал «герб») равна $p = \frac{1}{2}$,отсюда $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Вероятность того, что событие A произойдет $k = 3$ раз, по формуле Бернулли равна

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \Rightarrow p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$$

Пример 2. В партии изделий 5% бракованных. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 изделий будет 2 бракованных?

Решение. Применим схему Бернулли. Испытание- это проверка детали. Число испытаний равно $n = 5$. Событие A- проверяемая деталь – бракованная.

Вероятность этого события равна $p = 0{,}05$, отсюда $q = 1 - p = 0{,}95$

Вероятность того, что событие A произойдет $k = 2$ раз, находим по формуле Бернулли: $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^3 = 0{,}02$

Пример 3. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число k элементов, которые выдержат испытание.

Решение. Наивероятнейшее число k_0 появления события A находим как целое число, принадлежащее промежутку $np - q \le k_0 \le np + p$. Если границы этого отрезка - целые числа, то они равновероятны и каждое из них может быть принято в качестве k_0.

$np - q \le k_0 \le np + p \Rightarrow 15 \cdot 0,9 - 0,1 \le k_0 \le 15 \cdot 0,9 + 0,9$, $13,4 \le k_0 \le 14,4$.

Отсюда k_0=14. Вероятность , что 14 элементов выдержат испытание равна

$p_{15}(14) = C_{15}^{14} p^{14} q = 5 \cdot 0,9^{14} \cdot 0,1 = 0,34$

Пример 4. Вероятность сдать экзамен равна 0, 7. Какова вероятность того, что в группе из 7 человек сдадут только 4 студента.

Решение. Применяем схему Бернулли при $n = 7$, $p = 0,7$, $q = 1 - p = 0,3$, $k = 4$

$$p_7(4) = C_7^4 p^k q^{n-k} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^3 = 0,23$$

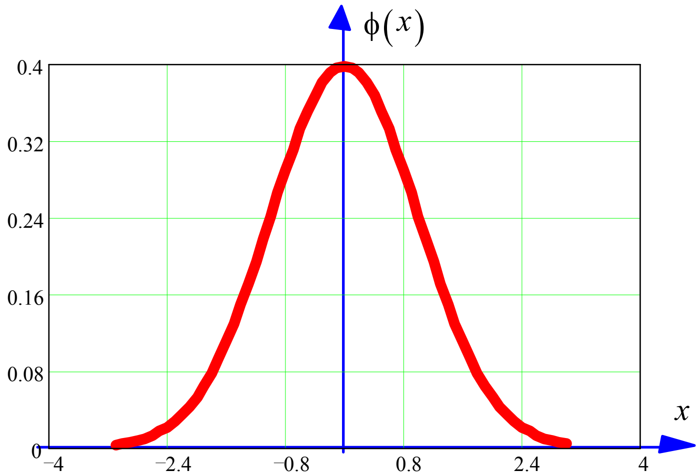
§11. Локальная теорема Лапласа

Формула Бернулли $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ при больших значениях n дает большую погрешность вычисления. Локальная теорема Лапласа дает в таком случае хорошую оценку вероятности:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где функция } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}}$$

Локальная функция Лапласа $\varphi(x)$ табулирована (Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, стр. 461, прил. 1.).

График функции $\varphi(x)$



Пример 4. На улице имеется 16 фонарей, каждый из которых загорается в шесть вечера с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что в указанное время будет гореть 6 фонарей.

Решение. Охарактеризуем схему Бернулли. Испытание – проверка горит ли фонарь. Эти испытания не зависимы и их число равно $n = 16$. Событие A - фонарь светит. Вероятность $p = 0,5$, $q = 1 - p = 0,5$, $k = 6$

Применим локальную теорему Лапласа $p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$.

Вычислим $x = \frac{6 - 16 \cdot 0,5}{\sqrt{16 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1$, $\varphi(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0,24$

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \Rightarrow p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot 0,24 = 0,121$$

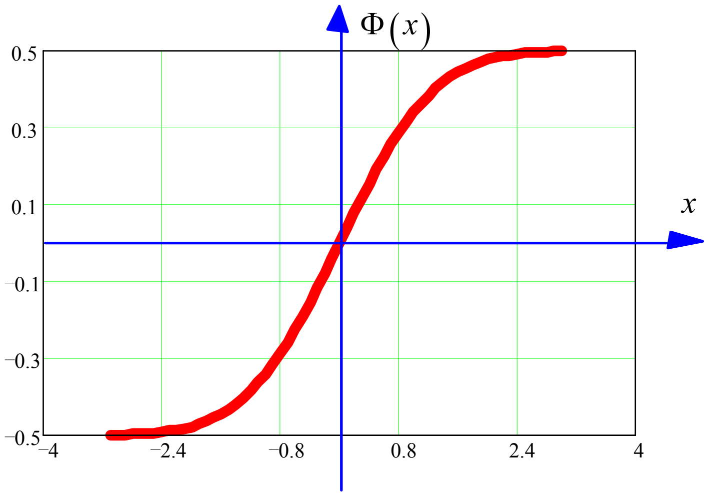
§12. Интегральная теорема Лапласа

Обозначим в схеме Бернулли через k число появлений события A в серии n независимых испытаний. Теорема позволяет оценить вероятность $p_n(k_1,k_2)$ неравенства $k_1 \le k \le k_2$. Вероятность $p_n(k_1,k_2) = P(k_1 \le k \le k_2)$ выражает тот факт, что событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз. Верно приближенное равенство

$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ (при $p \ge 0{,}1$) и

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа. Эта функция табулирована (Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, стр. 462, прил. 2.)

График функции $\Phi(x)$



Функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. верно $\forall x \Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 1. Вероятность того, что фирма потерпит убытки , равна 0,14. Какова вероятность того, что из 100 случайно взятых фирм потерпят убытки не менее 19, но не более 20%?

Решение. Применим схему Бернулли, в которой испытание – анализ убытков отдельно взятой фирмы. Число испытаний $n = 100$. Событие A означает, что исследуемая фирма терпит убытки. Вероятность этого события равна $p = P(A)$=0,14, вероятность противоположного события $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$=0,86.

Пусть число k равно числу убыточных фирм среди выбранных 100 фирм.

Это число не меньше $k_1 = 10$ (это 10% от 100 фирм), но не превосходит $k_2 = 20$ фирм

Применим асимптотическую формулу Лапласа в ее интегральной форме, так как число испытаний велико и вероятность события A больше 0,1

Находим: $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{10 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -2{,}5$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{20 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$

Вероятность

$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \Rightarrow P(10 \le k \le 20) \approx \Phi(0) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(0) + \Phi(2{,}5) = 0{,}4938$

Применили свойство нечетности $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. По таблице находим $\Phi(0) = 0$, $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$

§13. Отклонение относительной частоты события от его вероятности

Производятся n независимых испытаний , в каждом из которых событие A наблюдается с вероятностью $p = P(A)$, причем $q = 1 - p$. Если k - число появлений события A в этой серии испытаний, то отношение $f = \frac{k}{n}$ есть относительная частота события A. Неравенство $\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$ выражает факт, что случайное значение $f = \frac{k}{n}$ отклоняется от вероятности события A по абсолютной величине на ε. Вероятность выполнения этого неравенства выражается приближенным равенством

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Доказательство. Заменим неравенство на равносильное неравенство $\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{k}{n} - p < \varepsilon$; $p - \varepsilon < \frac{k}{n} < p + \varepsilon$; $np - n\varepsilon < k < np + n\varepsilon$; $k_1 < k < k_2$, где принято $k_1 = np - n\varepsilon$ и $k_2 = np + n\varepsilon$

Применим интегральную теорему Лапласа: $P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \Rightarrow$

Находим $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{(np - n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}$.

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \Rightarrow P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Пример 1. Найти вероятность того, что при 100 бросках монеты относительная частота появления «герба» будет отклоняться от вероятности $p = 0{,}5$ на $\varepsilon = 0{,}1$.

Решение. Применим формулу отклонение относительной частоты события от его вероятности при $n = 100$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$ и $\varepsilon = 0{,}1$

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{100}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954$$

Заданное отклонение является достаточно достоверным событием.

§14. Формула Пуассона

Формула Бернулли удобна для вычислений лишь при сравнительно небольшом числе испытаний. При больших значениях n пользоваться этой формулой неудобно. Чаще всего в этих случаях используют формулу Пуассона. Эта формула определяется теоремой Пуассона.

Теорема. Если вероятность наступления события в каждом испытании постоянна и мала ($p < 0{,}1$), а число n независимых испытаний достаточно велико, то вероятность наступления события ровно k раз приближенно равна

$p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$

Пример 1. Станок - автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная им деталь окажется бракованной , равна 0,01 . Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что изготовленная деталь по счету с номером m будет бракованной,. Вероятность этого события равна $p = P(A) = 0{,}01$. Применим схему Бернулли для события A , которое появляется с вероятностью p в n=200 независимых испытаниях . Вероятность появления k =4 раз этого события вычисляется по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$, где $q = 1 - p = 0{,}99$. Подставим данные и получим: $P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k} = C_{200}^4\, p^4 q^{196}$. При вычислении возможна большая погрешность.

Применим другой подход. Ввиду малости вероятности $p = 0{,}01$ распределение Бернулли приближенно совпадает с распределением Пуассона, те.: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$ - среднее число бракованных деталей в партии. Находим $P_n(4) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \dfrac{2^4}{4!} e^{-2}$ =0,0902.

Это же значение вероятности можно найти по таблице (Гмурман В.Е.) распределения Пуассона.