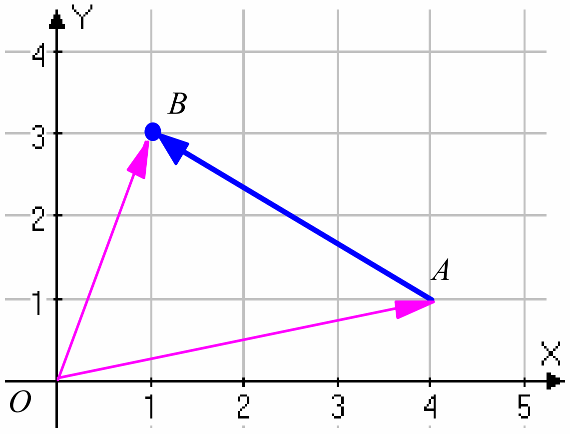
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ по теме "ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА" Составитель: В.П.Белкин

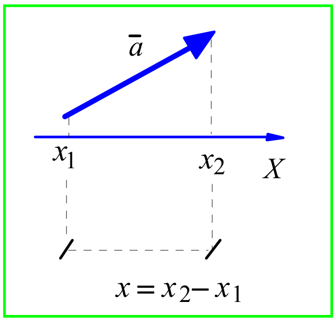
Занятие 1. Действия над векторами

Пример 1.

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, где $A(4;1)$ и $B(1;3)$. Найти их проекции на координатные оси.

Решение. Построим точки и вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, где O - начало системы координат





Применим правило проектирования вектора на числовую ось. Проекция вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ на координатную ось OX равна разности проекций его конца и начала на эту ось, т.е. $x = x_2 - x_1$.

Утверждение. Вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ однозначно определяется тройкой (x, y, z) своих проекций на координатные оси OX, OY, OZ.

Вектор записывается в проекциях так: $\bar{a} = \overline{AB} = (x, y, z)$, где $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

Правило: Проекции вектора $\overline{AB}$ равны разности одноименные координаты его конца и начала, кратко $\overline{AB} = B - A$.

Вектор $\overline{OA}$ называется радиус-вектором точки A. Его проекции совпадают с координатами точки A. Поэтому $\overline{OA} = (4;1)$. Аналогично $\overline{OB} = (1;3)$

Находим вектор $\overline{AB} = B - A = B(1;3) - A(4;1) = (-3;2)$

Пример 2.

Найти модуль $\left|\overline{AB}\right|$, где $A(4;1)$ и $B(1;3)$ (см. пример 1).

Решение. Модуль вектора $\overline{AB} = (x, y, z)$ обозначается вектора $\left|\overline{AB}\right|$ и равен длине отрезка AB. Модуль вычисляется по формуле $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Так как векторы расположены на плоскости, то проекция $z = 0$.

Подставим проекции $\overline{AB} = (-3;2) \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Пример 3.

Разложить $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, где $A(4;1)$ и $B(1;3)$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$. (см. пример 1).

Решение. Вектор $\bar{n}$ называется ортом или единичным вектором, если его модуль равен 1, т.е. $\left|\bar{n}\right| = 1$. Орты числовых осей OX, OY, OZ обозначаются $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ - это единичные векторы, лежащие на этих осях и имеющие направление этих осей.

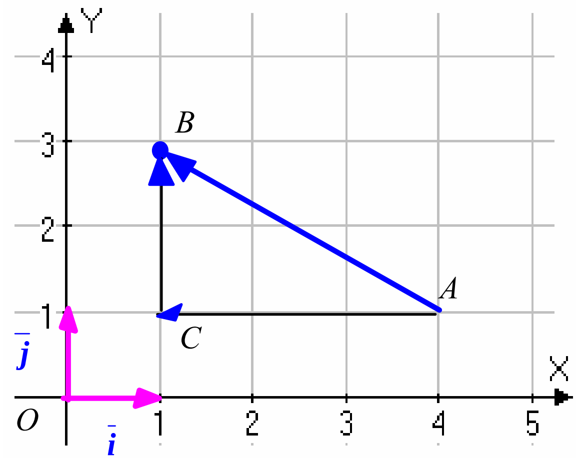
Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называют базисом трехмерного пространства, а векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ - базисом двумерного пространства (плоскости XOY).

Мы говорим, что вектор $\bar{a}$ разложен по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, если его можно представить в виде линейно комбинации базисных векторов, т.е. $\bar{a} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$, где $x, y, z \in R$.

Выражение $x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$ называют линейной комбинацией векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Скаляры (числа) называют координатами вектора $\bar{a} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$ в этом базисе.

Справедливо утверждение. Для прямоугольной системы координат координаты вектора совпадают с его проекциями, т.е. $\bar{a} = (x, y, z) \Leftrightarrow \bar{a} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$

Поэтому верно $\overline{AB} = (-3;2) \Leftrightarrow \overline{AB} = -3\cdot\bar{i} + 2\cdot\bar{j}$



Найдем разложение вектора геометрически, запишем его как сумму $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ по правилу многоугольника.

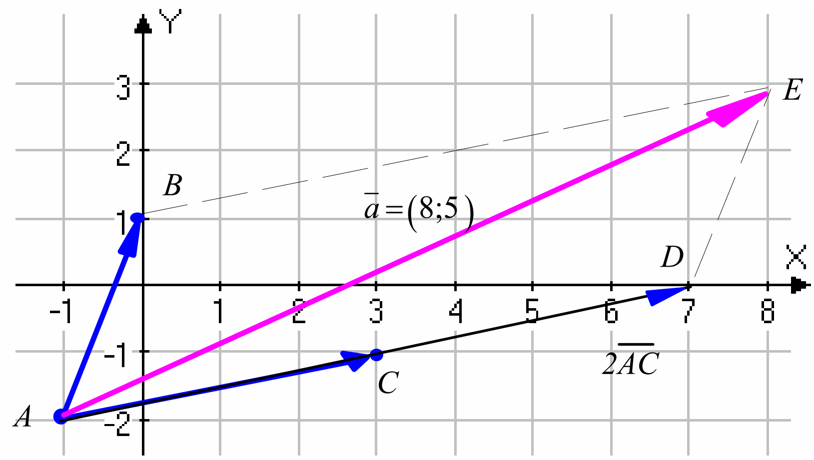
Выражаем $\overline{AC} = -3\cdot\bar{i}$, $\overline{CB} = 2\cdot\bar{j}$. Поэтому $\overline{AB} = -3\cdot\bar{i} + 2\cdot\bar{j}$

Ответ: $\overline{AB} = (-3;2) \Leftrightarrow \overline{AB} = -3\cdot\bar{i} + 2\cdot\bar{j}$

Пример 4.

Вычислить координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$, где $A(-1;-2)$, $B(0;1)$, $C(3;-1)$. Сделать чертеж, геометрически определить проекции вектора $\bar{a}$.

Решение. Построим на плоскости XOY точки A, B, C и векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $2\overline{AC}$, сумму $\bar{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$.



При построении вектора $2\overline{AC}$ мы увеличили вектор $\overline{AC}$ в два раза. Обозначим $\overline{AD} = 2\overline{AC}$. Точка D будет лежать на оси абсцисс (ордината точки D равна нулю).

Производим сложение геометрических векторов $\overline{AB}$, $2\overline{AC}$ по правилу параллелограмма, т.е. вектор $\bar{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$ - это диагональ параллелограмма $ABED$. Находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ по правилу: “из координат конца вектора вычитаем одноименные координаты его начала”.

$$\overline{AB} = (0;1) - (-1;-2) = (1;3) \qquad \overline{AC} = (3;\ -1) - (-1;-2) = (4;1)$$

Умножение вектора на константу и сложение векторов производим покоординатно:

$\bar{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC} = (1;3) + 2\cdot(4;1) = (1;3) + (8;2) = (9;5)$.

Итак, получаем: $\bar{a} = (9;5)$.

Переходим ко второй части задачи. Находим геометрически проекции $(x;y)$ вектора $\bar{a}$ на координатные оси:

$OX: \quad x = 8 - (-1) = 9$

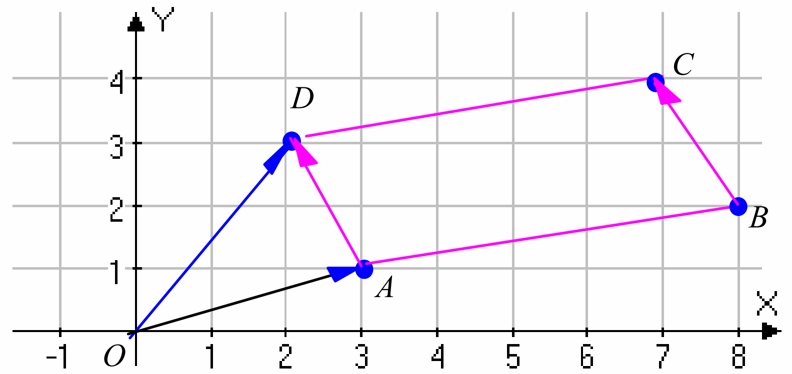
$OY: \quad y = 3 - (-2) = 5$

Вопрос. Почему точка D лежит на оси абсцисс. Для проверки найдите координаты радиус-вектора $\overline{OD}$.

Пример 5.

Известны три последовательные вершины $A(3;1)$, $B(8;2)$, $C(7;4)$ параллелограмма $ABCD$.

Найти координаты вершины D.



Решение. Построим параллелограмм $ABDC$. Применим правило: координаты радиус-вектора $\overline{OA} = (x;y)$ совпадают с координатами точки $A(x;y)$

Поэтому радиус вектор $\overline{OA} = (3;1)$. Радиус-вектор $\overline{OD}$ точки D находим по правилу многоугольника: $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD}$.

При параллельном переносе вектор не меняется, поэтому верно равенство

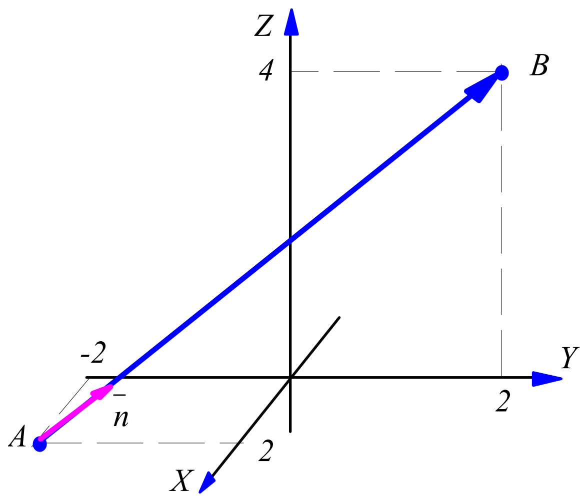
$\overline{AD} = \overline{BC} = C(7;4) - B(8;2) = (-1;2)$

Отсюда $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} \Rightarrow \overline{OD} = (3;1) + (-1;2) = (2;3) \Rightarrow D(2;3)$. Ответ: $D(2;3)$

Пример 6.

Вычислить модуль вектора $\overline{AB}$, где $A(2;\,-2;0)$, $B(0;2;4)$. Найти орт $\bar{n}$ вектора $\overline{AB}$. Сделать чертеж.

Решение. Построим точки A, B и вектор $\overline{AB}$ в пространстве



Находим проекции вектора $\overline{AB} = B(0;2;4) - A(2;\,-2;0) = (-2;4;4)$

Модуль вычисляется по формуле $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+4^2+4^2} = 6$

Орт $\overline{n} = \dfrac{1}{\left|\overline{AB}\right|}\cdot\overline{AB} = \dfrac{1}{6}\cdot(-2;4;4) = \left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

Чтобы построить орт $\overline{n}$ нужно уменьшить вектор $\overline{AB}$ в 6 раз (во столько раз, какова длина вектора)

Пример 7.

При каких значениях параметра x два вектора $\overline{a} = (x; 2\cdot x-1)$, $\overline{b} = (2;\ x+1)$ будут коллинеарными?

Решение. Применим признак коллинеарности векторов - “ два вектора коллинеарны в том и только том случае, когда их одноименные координаты пропорциональны”,

$$\overline{a}\,||\,\overline{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Для двумерных векторов $\overline{a}\,||\,\overline{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{2\cdot x-1}{x+1}$. Решаем это уравнение

$x\cdot(x+1) = 2\cdot(2\cdot x-1)$, $x^2+x = 4\cdot x-2$, $x^2-3\cdot x+2=0$, $x_1=1$, $x_2=2$

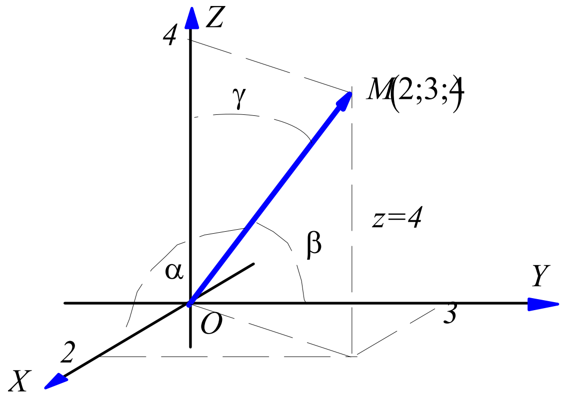
С геометрической точки зрения векторы коллинеарны, если один вектор получается из другого растяжением (сжатием). Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$

Занятие 2 . Приложение векторов

Пример 1.

Построить радиус-вектор точки $M(2;3;4)$, определить его модуль и направление (т.е. его направляющие косинусы).

Решение. Построим точку $M(2;3;4)$ и вектор $\overline{OM}$. Координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$ совпадают с координатами его конца $M(2;3;4)$, т.е. $\overline{OM} = (2;3;4)$.



Модуль вектора $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29} \approx 5,4$

Направляющие углы - это углы, которые вектор образует с координатными осями. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами. Вычислим их по формулам:

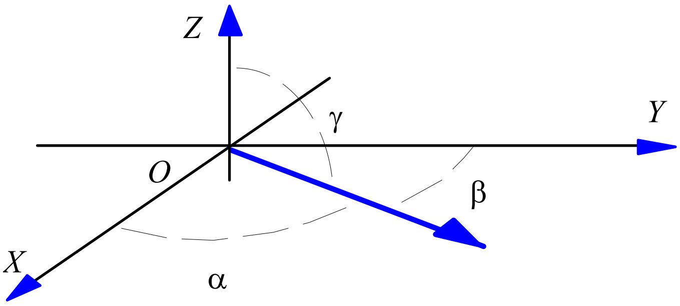
$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{2}{\sqrt{29}},\ \cos\beta = \frac{y}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{3}{\sqrt{29}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\left|\overline{OM}\right|} = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

Единичный вектор $\overline{n} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{29}};\dfrac{3}{\sqrt{29}};\dfrac{4}{\sqrt{29}}\right)$ определяет направление вектора $\overline{OM}$. (т.е. является ортом этого вектора).

Пример 2.

Вектор $\overline{a}$ составляет с осями OX, OZ углы 60^0 и 90^0. Найти угол, который этот вектор составляет с осью OY.

Решение. Сделаем чертеж. Построим вектор $\bar{a}$ произвольной длины, который с осями образует заданные направляющие углы $\alpha = 60^0$, $\gamma = 90^0$. Так как $\gamma = 90^0$, то это значит, что вектор $\bar{a}$ лежит в плоскости XOY. Угол α можно откладывать в обе стороны от оси абсцисс. Для положения изображенного на чертеже находим $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 60^0 = 30^0$



Решим эту задачу аналитически. Применим тождество для направляющих косинусов

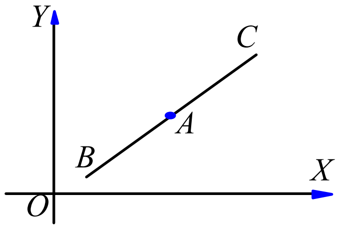
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 60^0 + \cos^2\beta + \cos^2 90^0 = 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\beta + 0 = 1$, $\cos^2\beta = \frac{3}{4}$,

$\cos\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Условию задачи удовлетворяют два вектора, имеющих направляющие углы: $\beta_1 = 30^0$, $\beta_2 = 150^0$. Ответ: $\beta_1 = 30^0$, $\beta_2 = 150^0$.

Пример 3.

Построить точку C, симметричную точке $B(-4;1)$ относительно $A(1;3)$

Решение. Симметричные точки B, C относительно точки A лежат на одной прямой и центр симметрии A делит отрезок BC пополам.

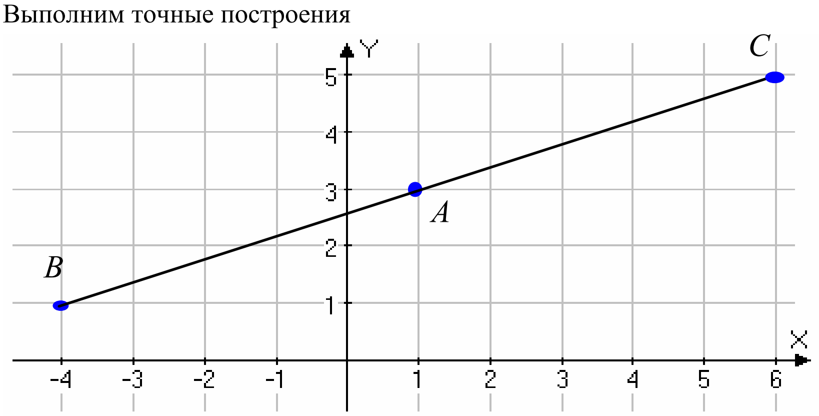


Применим формулы середины отрезка

$x_A = \frac{1}{2}\cdot(x_B + x_C) \Rightarrow 2x_A = x_B + x_C$, $x_C = 2x_A - x_B$. По аналогии $y_C = 2y_A - y_B$

Отсюда $x_C = 2\cdot 1 - (-4) = 6$; $y_C = 2\cdot 3 - 1 = 5$. Точка $C(6;5)$

Выполним точные построения



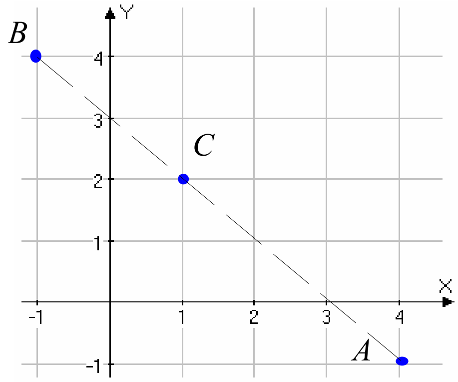
Пример 4.

Найти (геометрически и аналитически) центр масс C системы двух точек $A(4;\,-1)$, $B(-1;4)$, имеющих соответственно массы $m_1 = 2$, $m_2 = 3$

Решение. Координаты центра масс системы двух точек:

$$x_C=\frac{m_1\cdot x_1+m_2\cdot x_2}{m_1+m_2}=\frac{2\cdot 4+3\cdot(-1)}{2+3}=1;\ y_C=\frac{m_1\cdot y_1+m_2\cdot y_2}{m_1+m_2}=\frac{2\cdot(-1)+3\cdot 4}{2+3}=2.$$

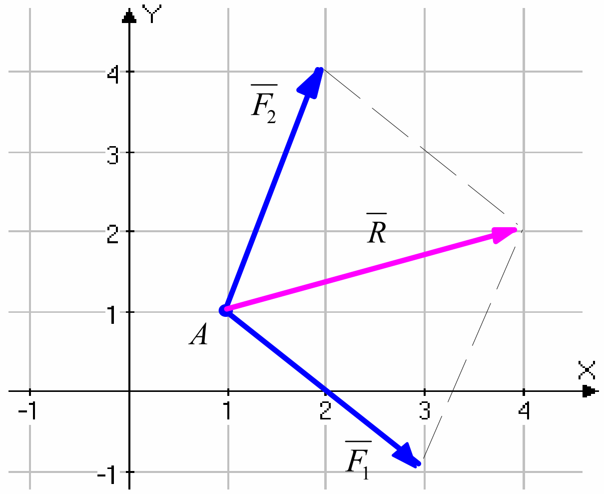
Центр масс $C(1;2)$ делит отрезок AB в отношении $\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{3}{2}$, считая от точки A.



Пример 5.

Найти равнодействующую сил $\overline{F_1}=2\cdot\bar{i}-2\cdot\bar{j}$, $\overline{F_2}$, приложенных к точке $A(1;1)$, где $F_{2,x}=1$, $F_{2,y}=3$.

Решение. Запишем силы в проекциях $\overline{F_1}=(2;-2)$, $\overline{F_2}=(1;3)$.

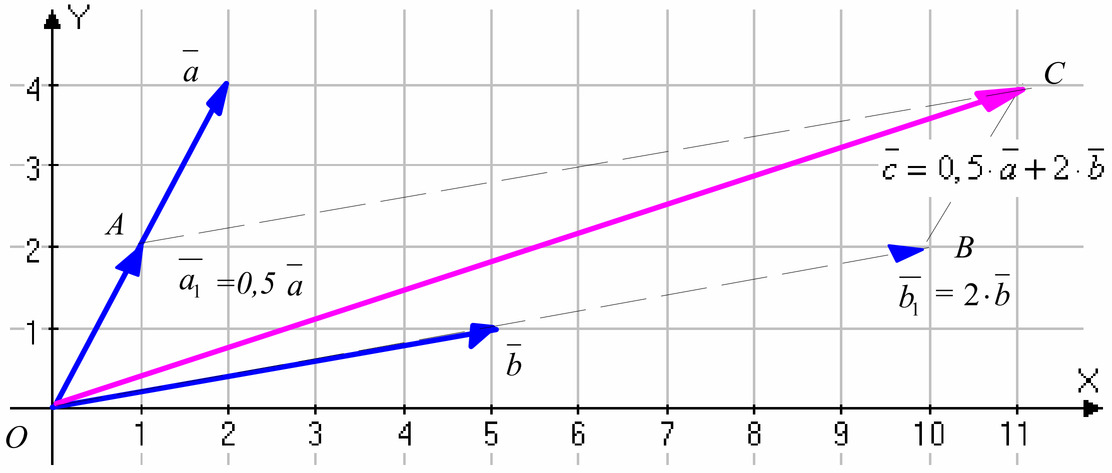


При построении силы, например $\overline{F_2}=(1;3)$, смещаемся из точки A горизонтально на 1 единицы вправо и на три единицы вверх. Равнодействующая равна сумме сил: $\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}=(2;-2)+(1;3)=(3;1)$.

Пример 6.

Разложить (геометрически и аналитически) вектор $\bar{c}=(11;4)$ по базису $\bar{a}=(2;4),\bar{b}=(5;1)$.

Решение. Изобразим двумерные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$. Они не коллинеарные и поэтому образуют базис плоскости $XOY=R^2$. Это значит, что любой вектор $\bar{c}\in R^2$ выражается в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е. найдутся такие скаляры $x,y\in R$, что верно разложение $\bar{c}=x\cdot\bar{a}+y\cdot\bar{b}$.



Получим геометрически разложение вектора $\overline{c}$ по этому базису. Проведем пунктирные оси через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$. Затем построим параллелограмм с диагональю $\overline{c}$, т.е. проецируем точку C на пунктирную ось параллельно другой оси. Получаем разложение $\overline{c} = \overline{a_1} + \overline{b_1}$, в котором слагаемые коллинеарны соответственно векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$. Выразим приближенно слагаемые $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$ через базисные векторы: $\overline{a_1} = 0,5 \cdot \overline{a}$ и $\overline{b_1} = 2 \cdot \overline{b}$. Следовательно, $\overline{c} = 0,5 \cdot \overline{a} + 2 \cdot \overline{b}$.

Эту задачу можно решить аналитически так. Проецируем обе части равенства $\overline{c} = x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b}$ на координатные оси:

$(11;4) = x \cdot (2;4) + y \cdot (5;1) \Rightarrow$ проекция на ось OX: $11 = 2 \cdot x + 5 \cdot y$; на ось OY: $4 = 4 \cdot x + y$.

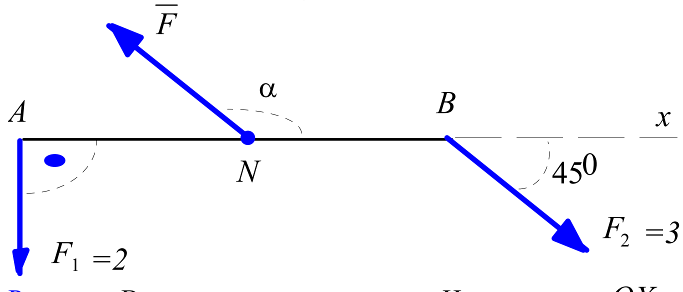
Решаем систему линейных уравнений по методу Крамера $\begin{cases} 2 \cdot x + 5 \cdot y = 11 \\ 4 \cdot x + y = 4 \end{cases}$.

Вычисляем определители: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -18$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -9$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -36$.

Отсюда: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,5$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$, $\overline{c} = 0,5 \cdot \overline{a} + 2 \cdot \overline{b}$

Пример 7.

Определить угол α и силу $\overline{F}$, приложенную к середине C отрезка AB, такую, что система сил, изображенных на чертеже, уравновешенная.



Решение. Введем систему координат. Направим ось OX вдоль AB, точку A примем за начало отсчета. Обозначим $\overline{F} = (F_x; F_y)$.

Система сил уравновешена, если их векторная сумма равна нулю. Находим проекции сил на координатные оси:

$\sum F_{i;x} = 0 \Rightarrow 0 + F_x + F_2 \cdot \cos 45^0 = 0$;

$\sum F_{i;y} = 0 \Rightarrow -F_1 + F_y - F_2 \sin 45^0 = 0$.

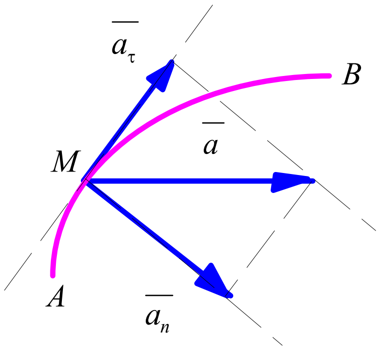
Составим систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} F_x + 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ F_y - 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -2,1 \\ F_y = \dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2} + 2 \approx 4,1 \end{cases}$$; модуль $F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{(-2,1)^2 + 4,1^2} = 4,6$

$\cos\alpha = \dfrac{F_x}{F} = -\dfrac{2,1}{4,6} = -0,46$, $\alpha \approx 117^0$.

Пример 8.

Точка M движется с ускорением $\overline{a}$ по дуге AB. Разложить геометрически ускорение $\overline{a}$ в сумму нормального и касательного ускорений $\overline{a_n}$, $\overline{a_\tau}$.

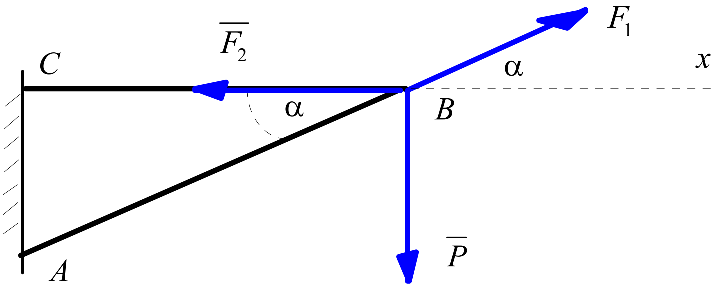


Решение. Проводим через точку касания M касательную к траектории AM. Далее проводим нормаль траектории, т.е. перпендикуляр к касательной, проходящий через точку M. Постоим прямоугольник на этих прямых с диагональю, равной вектору $\overline{a}$.

Получаем разложение ускорения $\overline{a} = \overline{a_n} + \overline{a_\tau}$

Пример 9.

Найти силу, растягивающую стержень CB кронштейна, к которому подвешен груз P. Угол $\angle ABC = \alpha$.



Решение. Укажем на чертеже силы, приложенные к точке B: вес груза - $\overline{P}$, реакция $\overline{F_1}$ стержня AB, реакция $\overline{F_2}$ стержня CB. Составим уравнение равновесия точки B:

$\sum F_{i,x} = 0 \Rightarrow -F_2 + F_1\cdot\cos\alpha = 0$; $\sum F_{i,y} = 0 \Rightarrow -P + F_1\cdot\sin\alpha = 0$.

Решаем систему уравнений:

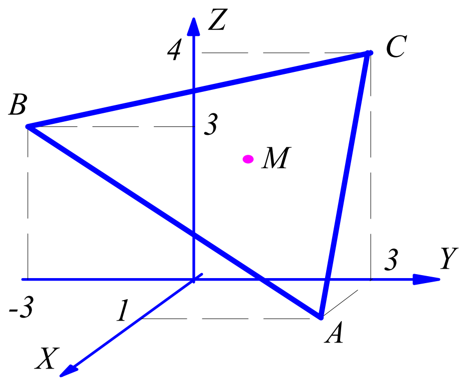
$$-P + F_1\cdot\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{P}{\sin\alpha}$$

$$-F_2 + F_1\cdot\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_2 = F_1\cdot\cos\alpha = \frac{P}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha = P\cdot ctg\alpha$$

Ответ. $F_1 = \dfrac{P}{\sin\alpha}$, $F_2 = P\cdot ctg\alpha$.

Пример 10.

Определить вершины и проекции центра масс M однородного треугольника ABC по данным пространственного чертежа



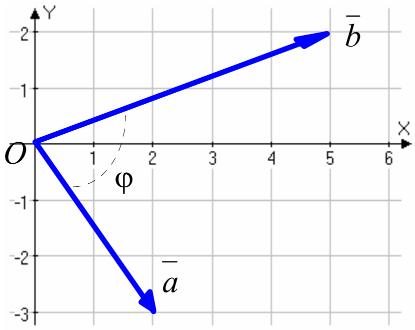
Ответ. $A(1;\,3;0)$, $B(0;-3;\,3)$, $C(0;3;4)$, $M\left(\frac{1}{3};1;\frac{7}{3}\right)$

Занятие 3. Скалярное произведение векторов

Пример 1.

Найти угол φ между векторами $\bar{a}=-3\cdot\bar{j}+2\cdot\bar{i}$, $\bar{b}=(5;\,2)$.

Решение. Запишем векторы $\bar{a}=(2;-3)$, $\bar{b}=(5;\,2)$ в проекциях. Построим эти вектора



Угол φ между векторами определим согласно формуле $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$.

Находим скалярное произведение векторов, модули векторов:

$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=2\cdot5+(-3)\cdot2=4$;

модули $|\bar{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$, $|\bar{b}|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$.

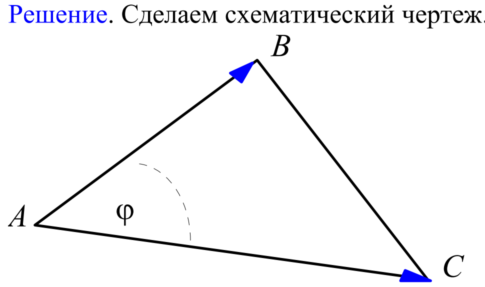
Определим угол φ :

$\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\dfrac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}\approx0,2$; $\varphi\approx\arccos0,2\approx78^0$. Ответ. $\varphi\approx78^0$

Пример 2.

Найти $\varphi=\angle A$ в треугольнике ABC, где $A(2;-1;0)$, $B(1;-2;1)$, $C(0;3;4)$

Решение. Сделаем схематический чертеж.



Находим вектор: $\overline{AB}=B(1;-2;1)-A(2;-1;0)=(-1;-1;\,1)$; аналогично: $\overline{AC}=(-2;4;\,4)$.

Скалярное произведение этих векторов:

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=(-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+1\cdot 4=2$.

Угол между этими векторами: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{AB\cdot AC}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{9}\approx\arccos 0{,}19\approx 79^0$.

Ответ. $\varphi\approx 79^0$

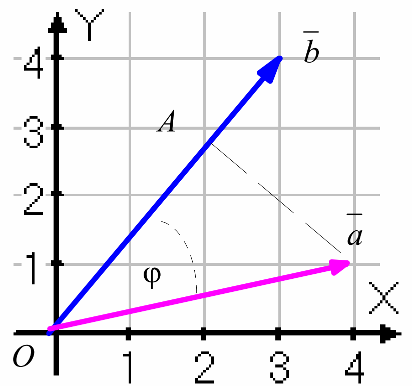
Пример 3.

Найти проекцию вектора $\overline{a}=(4;1)$ на вектор $\overline{b}=(3;4)$

Решение. Из конца вектора $\overline{a}$ опускаем перпендикуляр на прямую, проходящую через вектор $\overline{b}$ Проекция равна длине отрезка OA, взятой со знаком «плюс», если угол φ - острый, в противном случае – со знаком «минус». Согласно определению проекция $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi$

Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}=4\cdot 3+1\cdot 4=16$, модуль вектора $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

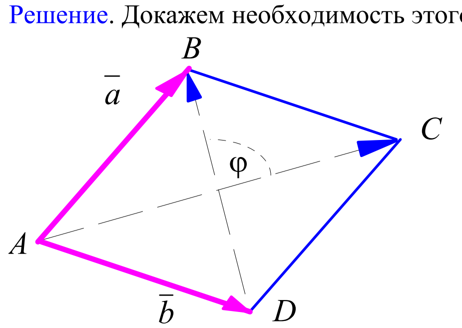
Применим формулу проекции $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}=\dfrac{16}{5}=3{,}2$



Пример 4.

Доказать, что параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны

Решение. Докажем необходимость этого утверждения. Построим ромб $ABCD$ на векторах $\overline{a}=\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{AD}$.



Выразим диагонали $\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{DB}=\overline{a}-\overline{b}$ через вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$

Применим признак перпендикулярности (ортогональности) векторов:

$\overline{AC}\perp\overline{DB}\ \Leftrightarrow\ \overline{AC}\cdot\overline{DB}=0$.

Вычислим скалярное произведение диагоналей

$\overline{AC}\cdot\overline{DB}=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=\overline{a}^2-\overline{b}^2=\left|\overline{a}\right|^2-\left|\overline{b}\right|^2=0$,

Равенство верно, так как для ромба стороны равны, т.е. $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|$

Угол φ между диагоналями ромба прямой.

Пример 5.

Раскрыть скобки в выражении $x=\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)^2+\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)^2$. Вычислить значение x при $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$.

Ответ. $x\approx 34$

Решение. Применим формулы квадрат суммы и разности:

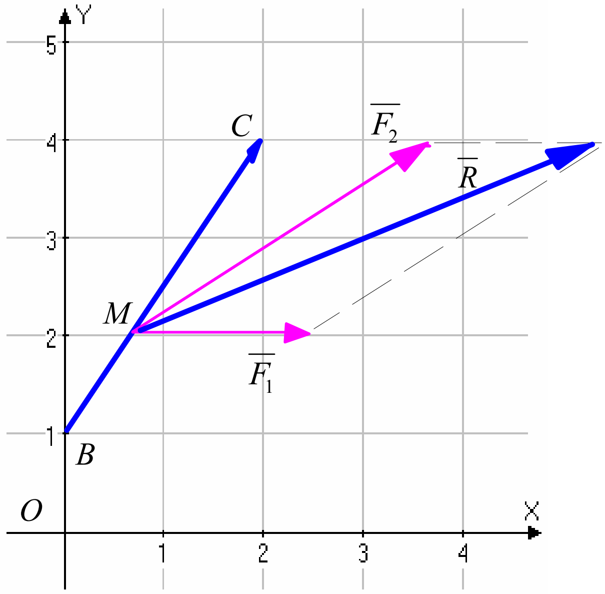
$$x=\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)^2+\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)^2 \Rightarrow x=\left(\overline{a}\right)^2+2\cdot\left(\overline{a}\cdot 2\overline{b}\right)+\left(2\overline{b}\right)^2+\left(\overline{a}\right)^2-2\cdot\left(\overline{a}\cdot 2\overline{b}\right)+\left(2\overline{b}\right)^2$$

$$x=2\cdot\left(\overline{a}\right)^2+2\cdot\left(2\overline{b}\right)^2,\ x=2\cdot\left|\overline{a}\right|^2+2\cdot 4\cdot\left|\overline{b}\right|^2,\ \ x=2\cdot 1^2+2\cdot 4\cdot 2^2=34$$

Пример 6.

Найти работу результирующей сил по перемещению точки M по прямой под действием постоянных сил $\overline{F_1}=(2;0)$, $\overline{F_2}=(3;2)$ из положения $B(0;1)$ в положение $C(2;4)$.

Решение. Построим вектора.



Находим результирующую силу $\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}=(2;0)+(3;2)=(5;2)$.

Вектор-перемещение точки $\overline{BC}=C(2;4)-B(0;1)=(2;3)$

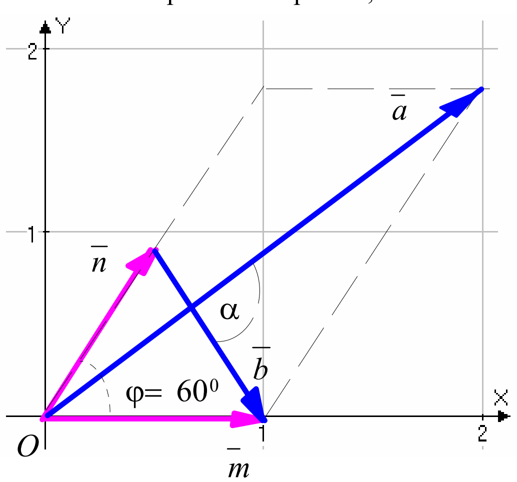
Находим работу A силы как скалярное произведение силы на вектор-перемещение:

$A=\overline{R}\cdot\overline{BC}=5\cdot 2+2\cdot 3=16$.

Пример 7.

Найти угол α между векторами $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-\overline{n}$, где $\overline{m}$, $\overline{n}$ -единичные векторы, образующие угол $\varphi=60^0$.

Решение. Построим вектора $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-\overline{n}$.



Находим косинус угла α по формуле $\cos\alpha=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}$. Координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ неизвестны, поэтому нельзя вычислить скалярное произведение этих векторов по обычной формуле.

Находим произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(\bar{m}+2\cdot\bar{n}\right)\cdot\left(\bar{m}-\bar{n}\right)$. Раскрываем скобки

$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{m}\cdot\bar{m}-\bar{m}\cdot\bar{n}+2\cdot\bar{n}\cdot\bar{m}-2\cdot\bar{n}\cdot\bar{n}\;\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{m}\cdot\bar{m}+\bar{m}\cdot\bar{n}-2\cdot\bar{n}\cdot\bar{n}$

Скалярные квадраты единичных векторов равны единице, т.е.

$\left|\bar{m}\right|=1$ и $\left|\bar{n}\right|=1\;\Rightarrow\bar{m}\cdot\bar{m}=\left|\bar{m}\right|^2=1$ и $\bar{n}\cdot\bar{n}=\left|\bar{n}\right|^2=1$

Вычислим скалярное произведение орт с помощью определения $\bar{m}\cdot\bar{n}=\left|\bar{m}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|\cdot\cos\varphi=1\cdot1\cdot\cos60^0=\dfrac{1}{2}$

Поэтому $\bar{a}\cdot\bar{b}=1+\dfrac{1}{2}-2\cdot1=-\dfrac{1}{2}$

Далее аналогично находим квадраты модулей

$\left|\bar{a}\right|^2=\left(\bar{m}+2\cdot\bar{n}\right)^2=\bar{m}^2+4\cdot\bar{m}\cdot\bar{n}+4\cdot\bar{n}^2=1+4\cdot\dfrac{1}{2}+4\cdot1=7$;

$\left|\bar{b}\right|^2=\left(\bar{m}-\bar{n}\right)^2=\bar{m}^2-2\cdot\bar{m}\cdot\bar{n}+\bar{n}^2=1-2\cdot\dfrac{1}{2}+1=1$; Модули $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{7}$, $\left|\bar{b}\right|=1$

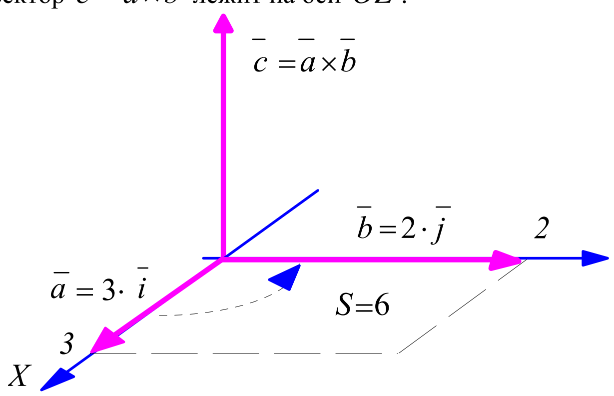
Отсюда $\cos\alpha=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7}\cdot1}$, $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{7}}$, $\alpha=\arccos\left(-\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{7}}\right)$, $\alpha\approx101^0$

Занятие 4. Векторное произведение векторов

Пример 1.

Построить векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$, если $\bar{a}=3\cdot\bar{i}$, $\bar{b}=2\cdot\bar{j}$. Определить направление векторного произведения с помощью правила правого буравчика.

Решение. Построим в пространстве вектора $\bar{a}=3\cdot\bar{i}$, $\bar{b}=2\cdot\bar{j}$.. Векторное произведение $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ - это вектор, который лежит на перпендикуляре к плоскости векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$. В нашем случае это плоскость XOY, а вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ лежит на оси OZ.



Найдем модуль $\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ как площадь $S=2\cdot3=6$ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=3\cdot\bar{i}$, $\bar{b}=2\cdot\bar{j}$. Следовательно, $\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi=3\cdot2\cdot\sin90^0=6$

Определим направление вектора $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ на оси аппликат. С конца вектора $\bar{c}$ мы видим кратчайший поворот φ от вектора $\bar{a}=3\cdot\bar{i}$ к вектору $\bar{b}=2\cdot\bar{j}$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Значит, вектор $\bar{c}$ направлен вверх по оси OZ и равен $\bar{c}=6\cdot\bar{k}$.

Направление векторного произведение $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ можно также найти по правилу правого буравчика: его рукоятку вращаем кратчайшим поворотом из положения вектора $\bar{a}$ в положение $\bar{b}$. Поступательное движение буравчика укажет направление векторного произведения $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

Пример 2.

Вычислить векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$, если $\bar{a}=(2;1;0)$, $\bar{b}=(1;3;\ -1)$.

Решение. Векторное произведение вычислим с помощью (символического) определителя третьего порядка; в его первой строке записаны орты, а остальные строки - проекции перемножаемых векторов:

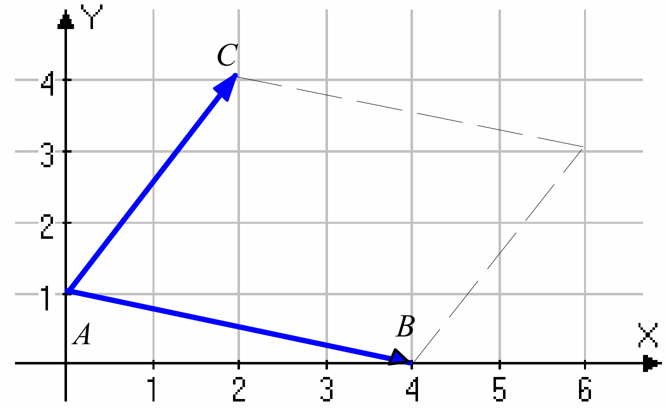
$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-\bar{i}+2\cdot\bar{j}+5\cdot\bar{k}\ \Rightarrow\ \bar{a}\times\bar{b}=(-1;\,2;\,5).$$

Произведем контроль: найденный вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=(-1;\,2;\,5)$ перпендикулярен (ортогонален) векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Значит, скалярные произведения $\bar{c}\cdot\bar{a}$, $\bar{c}\cdot\bar{b}$ равны нулю. Например: $\bar{c}\cdot\bar{a}=(-1)\cdot 2+2\cdot 1+5\cdot 0=0$.

Пример 3.

Вычислить площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, где $A(0;1)$, $B(4;0)$, $C(2;4)$.

Решение. Построим параллелограмм на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$



Находим вектора: $\overline{AB}=B(4;0)-A(0;1)=(4;-1)$; $\overline{AC}=C(2;4)-A(0;1)=(2;3)$

Вычислим векторное произведение двумерных векторов, считая, что их аппликата $z=0$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -0\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14\cdot\bar{k}\ \Rightarrow\ \overline{AB}\times\overline{AC}=(0;0;14).$$

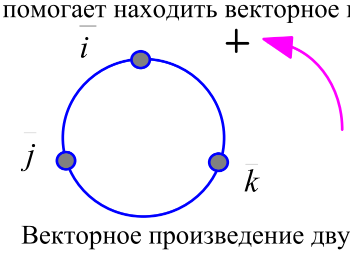
Воспользуемся геометрически смыслом модуля векторного произведения.

Площадь параллелограмма $S=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=14$.

Пример 4.

Выполнить действия: $2\cdot\bar{i}\cdot(\bar{j}\times\bar{k})+3\bar{j}\cdot(\bar{i}\times\bar{k})+4\cdot\bar{k}\cdot(\bar{i}\times\bar{j})+(\bar{i}\times\bar{j})\cdot\bar{i}$

Решение. Расположим орты в положительном направлении обхода окружности. Это мнемоническое правило помогает находить векторное произведение различных орт.



Векторное произведение двух орт равно третьему орту, взятому со знаком +, если от первого сомножителя мы передвигаемся ко второму по окружности в положительном направлении, иначе берем знак "минус". Например, $\bar{i}\times\bar{j}=+\bar{k}$, $\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$.

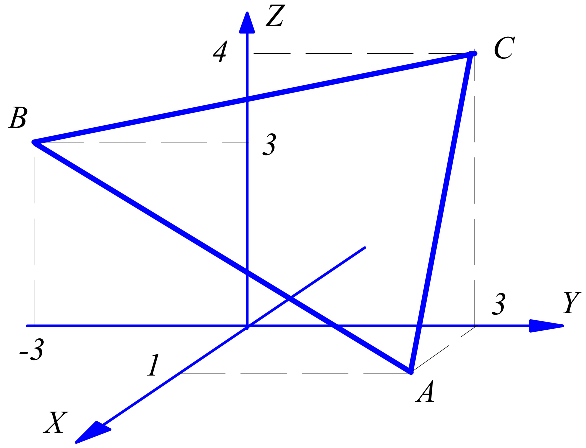
Отсюда

$$2\cdot\bar{i}\cdot\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)+3\bar{j}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)+4\cdot\bar{k}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)+\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)\cdot\bar{i}=2\cdot\bar{i}\cdot\bar{i}+3\cdot\bar{j}\cdot\left(-\bar{j}\right)+4\cdot\bar{k}\cdot\bar{k}+\bar{k}\cdot\bar{i}=$$

$2\cdot1-3\cdot1+4\cdot1+0=3$. Ответ. 3.

Пример 5.

Найти площадь и высоту CD треугольника ABC, если $A(1;3;0)$, $B(0;-3;3)$, $C(0;3;4)$



Решение. Находим вектора: $\overline{AB}=B(0;-3;3)-A(1;3;0)=(-1;-6;3)$;
$\overline{AC}=C(0;3;4)-A(1;3;0)=(-1;0;4)$.

Вычислим векторное произведение двумерных векторов, считая, что их аппликата $z=0$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-1&-6&3\\-1&0&4\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-6&3\\0&4\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-1&3\\-1&4\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-1&-6\\-1&0\end{vmatrix}=-24\cdot\bar{i}+\bar{j}-6\cdot\bar{k}=(-24;1;-6)$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=(-24;1;-6)\Rightarrow\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{613}\approx24{,}8$$

Площадь треугольника ABC равна $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{613}\approx12{,}4$

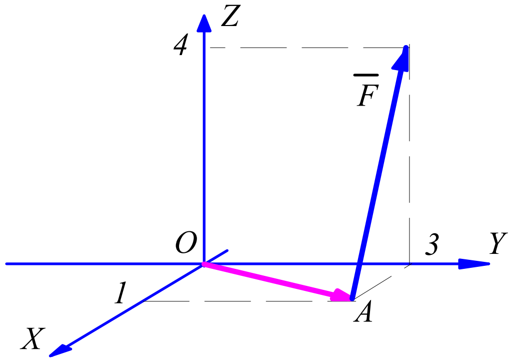
Высота $h=CD$ находится из другой формулы площади $S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h\Rightarrow h=\frac{2\cdot S}{AB}$

$$AB=\sqrt{(-1)^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{46}\approx6{,}78;\quad h=\frac{2\cdot S}{AB}=\frac{2\cdot12{,}4}{6{,}78}=3{,}65$$

Пример 6.

Найти момент $\overline{M}=\overline{M}_o\left(\overline{F}\right)$ силы $\overline{F}=(-1;0;4)$ относительно начала координат O, если известно, что сила $\overline{F}$ приложена к точке $A(1;3;0)$. Найти модуль момента силы и направляющие косинусы момента силы.

Решение. Сделаем чертеж. Построим вектор-рычаг $\overline{OA}=(1;3;0)$ и силу $\overline{F}=(-1;0;4)$, приложенную $A(1;3;0)$.



Находим момент силы согласно формуле

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 12 \cdot \bar{i} - 4 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} = (12; -4; 3)$$

Вычислим модуль момента:

$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = (12; -4; 3) \Rightarrow M = \left|\overline{OA} \times \overline{F}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{12^2 + (-4)^2 + 3^2} = 13$$

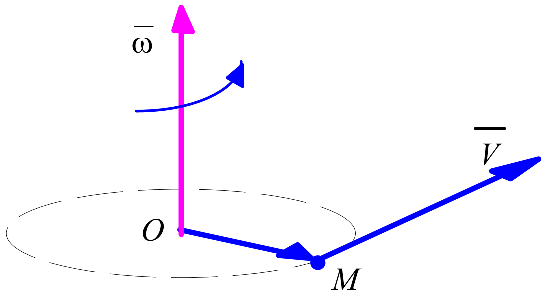
Направляющие косинусы момента

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M} = \frac{12}{13};\ \cos\beta = \frac{M_y}{M} = -\frac{4}{13};\ \cos\gamma = \frac{M_z}{M} = \frac{3}{13}$$

Пример 7.

Точка M движется по окружности с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega} = 2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j}$ вокруг оси, проходящей через начало координат. Найти скорость $\overline{V}$ этой точки в момент, когда $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$.

Решение. Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ перпендикулярен к плоскости окружности и его направление определяется по правилу правого буравчика при вращении его рукоятки в сторону скорости $\overline{V}$. Применим формулу $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{OM}$, где $\overline{OM} = (1;\ -2;\ 1)$ - радиус-вектор точки M.



Запишем векторное произведение:

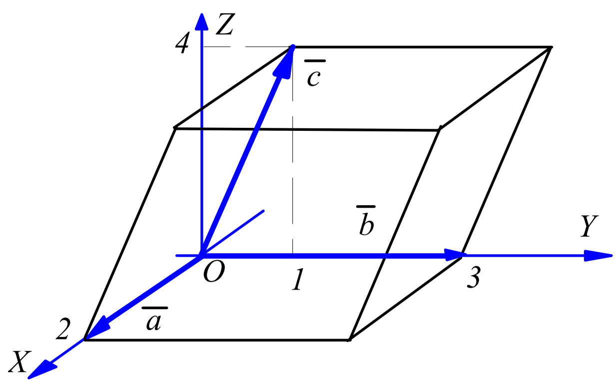
$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{OM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} - 7 \cdot \bar{k} = (3; -2; -7)$$

Занятие 5. Смешанное произведение трех векторов

Пример 1.

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i}$, $\bar{b} = 3 \cdot \bar{j}$, $\bar{c} = (0;1;4)$. Правой или левой будет связка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?

Решение. Построим вектора и параллелепипед с ребрами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Объем V параллелепипеда определим с помощью геометрического смысла смешанного произведения: $V = \pm\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$.



Вычислим смешанное произведение с помощью определителя, составленного из проекций перемножаемых векторов:

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=24$$

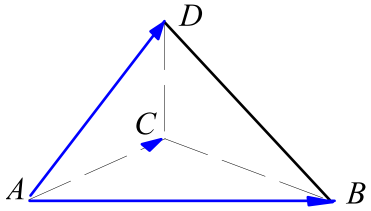
Итак, $V=24$. Связка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. правая, ибо $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)>0$. Заметим, это означает, что с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ виден в положительном направлении (против часовой стрелке).

Объем можно вычислить по обычной формуле $V=S\cdot h=2\cdot 3\cdot 4=24$

Пример 2.

Найти объем пирамиды $ABCD$, где $A(1;2;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(3;1;1)$, $D(5;4;4)$.

Решение. Сделаем схематический чертеж.



Введем вектора: $\bar{a}=\overline{AB}=B(-1;0;2)-A(1;2;1)=(-2;-2;1)$,

$\bar{b}=\overline{AC}=C(3;1;1)-A(1;2;1)=(2;-1;0)$,

$\bar{c}=\overline{AD}=D(5;4;4)-A(1;2;1)=(4;2;3)$.

Тогда объем пирамиды равен $V=\pm\dfrac{1}{6}\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$.

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-(-2)\cdot 3-(-2)\cdot 6+1\cdot 8=26$$

$V=\pm\dfrac{1}{6}\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\Rightarrow V=\dfrac{1}{6}\cdot 26=\dfrac{13}{3}$. Ответ: $V=\dfrac{13}{3}$.

Пример 3.

Доказать, что точки $O(0;0;0)$, $A(1;2;0)$, $B(2;-1;5)$, $C(3;1;5)$ компланарны.

Решение. Четыре точки O,A,B,C лежат в одной плоскости (т.е. компланарны) $\Leftrightarrow$ три вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ лежат в одной плоскости, т.е. их смешанное произведение равно нулю (признак компланарности).

Векторы $\overline{OA}=(1;2;0)$, $\overline{OB}=(2;-1;5)$, $\overline{OC}=(3;1;5)$

Вычислим смешанное произведение

$$\left(\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 5\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & 5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 5\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-10)-2\cdot(-5)+0=0$$

Пример 4.

Найти проекцию вектора $\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, если $\bar{a}=(1;1;0)$, $\bar{b}=(2;0;1)$, $\bar{c}=(1;1;2)$.

Решение. Применим формулу проекции вектора на вектор

$$\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{n}=\frac{\bar{n}\cdot\bar{c}}{|\bar{c}|}=\frac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{|\bar{c}|}.$$

Применим определение смешанного произведения $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$.

$$\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{n} = \frac{(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{(\bar{a},\bar{b},\bar{c})}{|\bar{c}|}.$$

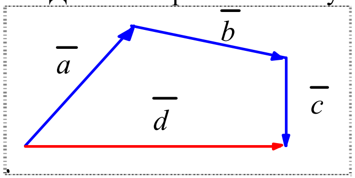
$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot 3 + 0 = -4$$

Модуль $|\bar{c}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$, проекции $\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{n} = -\dfrac{4}{\sqrt{6}}$. Ответ: $\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{n} = -\dfrac{4}{\sqrt{6}}$.

Контрольные вопросы и примеры (для подготовки к коллоквиуму)

Линейные операции над векторами

1. Найти координаты точки N, симметричной точке $M(3;\ -3;\ 4)$ относительно: а) начала координат; б) плоскости XOY.
2. Может ли точка M находиться в равновесии под действием трех попарно не коллинеарных сил?
3. Чему равен вектор, получаемый из $\bar{a} = (3;\ 4;\ -1)$ увеличением его длины в 3 раза?
4. Каков геометрический смысл неравенства $|\bar{a}+\bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$? (неравенство треугольника)
5. Доказать правило многоугольника (см. черт.), используя определение суммы двух векторов.



6. Чему равен вектор $\bar{a} = 2\overline{OA} + \overline{AO}$, если $A(3;\ 4)$?
7. Найти орт биссектрисы первого октанта- прямой, образующей равные углы с осями координат.
8. Найти координаты точки B, если известно, что $\overline{AB} = (2;\ 1;\ )$, $A(3;\ 4)$.
9. Доказать, что медиана $\overline{AM}$ в треугольнике ABC равна $\overline{AM} = \dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$.
10. Чему равен вектор $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$?
11. Вектор $\bar{b}$ получен поворотом вектора $\bar{a} = (3;\ -4)$ на 90^0 по часовой стрелке. Найти проекции вектора $\bar{b}$.

Скалярное произведение векторов

1. Как расположены векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, если $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|$?
2. Известно, что $\bar{a}\bar{b} = 0$, $\bar{b}\bar{c} = 0$, $\bar{c}\bar{a} = 0$ и $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - орты. Чему равен объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?
3. Вектор $\bar{a}$ длиннее вектора $\bar{b}$. Какое из чисел $Пр_{\bar{a}}\bar{b}$, $пр_{\bar{b}}\bar{a}$ большее?
4. Чему равен вектор $\bar{a}$, если $\bar{a}\bar{i} = 0$, $\bar{a}\bar{j} = 0$, $\bar{a}\bar{k} = 0$?
5. Доказать переместительный закон $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.
6. Почему скалярное произведение называется скалярным?
7. Будет ли угол между векторами $\bar{a} = (3;\ 0;\ -4)$, $\bar{b} = (0;\ 1;\ 1)$ острым?

Векторное произведение векторов

1. Изменится ли векторное произведение, если к его первому множителю добавить второй?

2. Указать направление силы Лоренца $\bar{F} = Q(\bar{v}\times\bar{B})$, действующей на движущийся заряд $Q > 0$ со скоростью $\bar{v}$ в магнитном поле $\bar{B}$.
3. Доказать, что $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c} \Rightarrow \bar{a}\bar{c} = 0$.
4. Почему векторное произведение называется векторным?
5. Обосновать инвариантность векторного произведения.
6. Почему верно равенство $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{b}\times\bar{a}|$?

7. Верно ли равенство $\overline{a}\times\overline{b}=|\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{b}\,|\cdot\sin\varphi$?

8. Объяснить антипереместительный закон $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$, используя основную формулу для вычисления векторного произведения.

9. Проверить тождество $(\overline{a}-\overline{b})\times(\overline{a}+\overline{b})=2\,\overline{a}\times\overline{b}$.

Смешанное произведение векторов

1. Чему равно смешанное произведение трех векторов, если среди них есть два равных?

2. Почему в формуле объема параллелепипеда $V=\pm(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ присутствуют знаки $\pm$?

3. Чему равно смешанное произведение орт декартовой системы координат?

4. Объяснить, используя основную формулу для вычисления смешанного произведения, почему оно меняет знак при перестановке местами сомножителей?

Применение векторной алгебры

1. Доказать формулу проекции $\text{Пр}_{\overline{n}}\overline{a}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$, где $\overline{a}=(x,y,z)$, $\overline{n}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$ - орт.

2. Доказать формулы координат середины отрезка.

3. Записать закон Кулона притяжения двух точечных зарядов в векторной форме.

4. Проверить формулу $\overline{F}=m(\overline{\omega}\times\overline{V})$ - центростремительной силы, действующей на точку M при ее вращении по окружности с центром O и радиуса r с угловой скоростью ω. Известно, что $F=\dfrac{mV^2}{r}$.

5. Проверить тождество $(\overline{a}\times\overline{b})^2=\overline{a}^2\overline{b}^2-(\overline{a}\overline{b})^2$.

6. Найти длину кратчайшей дуги AB , лежащей на сфере с центром O , если $A(1;\,2;\,1)$, $B(2;\ -1;\,1)$.

7. У неколлинеарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ - положительные координаты. Доказать, что их векторное произведение имеет хотя бы одну отрицательную координату.

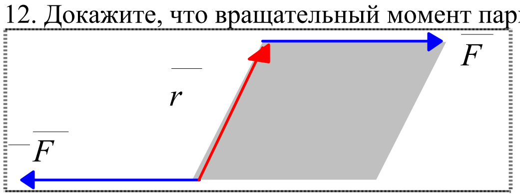
8. Разложить геометрически скорость $\overline{V}=(2;\,4)$ по двум направлениям, заданными векторами $\overline{a}=(2;\,1)$, $\overline{b}=(0;\,1)$.

9. Доказать, что момент суммы сил равен сумме моментов слагаемых.

10. Доказать, что момент уравновешенной системы сил - величина инвариантная, т.е. не зависит от выбора точки, относительно которой находится момент.

11. Докажите, что работа суммы сил равна сумме работ каждой силы.

12. Докажите, что вращательный момент пары сил $\overline{F}$, $-\overline{F}$ изображается площадью параллелограмма.



13. При каком значении x векторы $\overline{a}=(x;\ -4)$, $\overline{b}=(3;\ -4x+1)$ коллинеарны?

14. Определить проекцию суммы $\overline{a}+\overline{b}$ на ось абсцисс, если $\overline{a}$, $\overline{b}$ являются ортами и образуют с осью абсцисс углы соответственно 30^0 и 150^0 .

15. Показать, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны, если $A(1;1;1)$, $B(2;3;0)$, $C(4;2;-1)$, $D(8;\ -10;\ -1)$.

16. Определить угол между высотой и медианой, выходящими из вершины $A(2;3)$ треугольника ABC , где $B(1;2)$, $C(-1;0)$.

17. Найти на оси аппликат точку M , которая равноудалена от точек $A(2;1;1)$, $B(2;0;0)$.

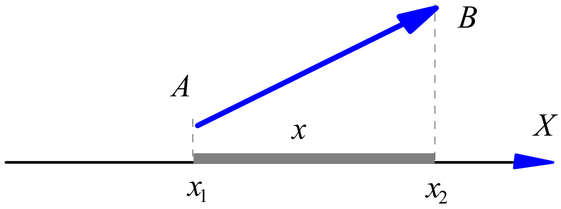
18. Даны три вершины $A(3;0;1)$, $B(2;\ -1;3)$, $C(3;0;1)$ треугольной пирамиды и ее объем $V=5$. Определить координаты четвертой вершины D пирамиды, если известно, что D принадлежит оси ординат. Найти высоту пирамиды, опущенную на грань ABC .

19. Отрезок AB , где $A(-3;0;2)$, $B(6;\ -3;4)$, разделен точками C и D на три равные части. Найти координаты этих точек.

20. Найти координаты центра масс трех материальных точек одинаковой массы, где $A(0;5;1)$, $B(1;\ -2;2)$, $C(-4;0;3)$.

ТЕОРИЯ

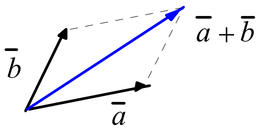
<u>Векторы</u>. Проекции вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на координатные оси: $\overline{a} = \overline{AB} = (x, y, z)$, где $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

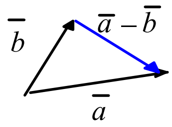


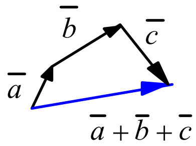
<u>Разложение вектора</u> $\overline{a}$ по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (орты -единичные вектора- координатных осей) :
$\overline{a} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overline{a} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$.

<u>Модуль</u> вектора, $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; орт (единичный вектор) $\overline{n} = \dfrac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a}$ вектора $\overline{a}$.

<u>Сумма</u> векторов $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ находится по правилу параллелограмма. <u>Разность</u> векторов $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$ находим по правилу треугольника. <u>Правило многоугольника</u>. Сумма $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ равна замыкающему вектору ломаной, составленной из слагаемых векторов. При умножении скаляра (т.е. числа) λ на вектор $\overline{a}$ этот вектор растягивается в λ раз.







Операции сложения, вычитания, умножения на скаляр векторов, заданных в проекциях, выполняются покоординатно. Например:
$(1;4) + (4;-3) = (1+4;4-3) = (5;1)$; $6 \cdot (2;-3) = (12;-18)$.

<u>Скалярное произведение</u> : $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}|\ |\overline{b}| \cos\varphi$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

<u>Векторное и смешанное произведения:</u>

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

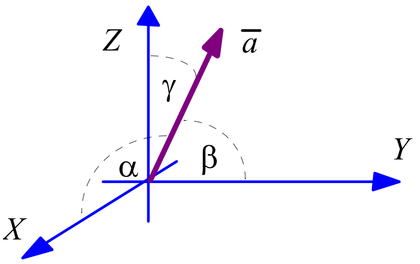
<u>Приложения векторов</u> .

Признак коллинеарности векторов: $\overline{a} \| \overline{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

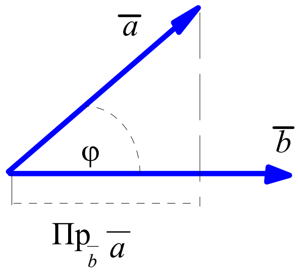
Признак перпендикулярности векторов $\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

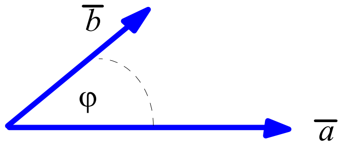
Направляющие углы и косинусы вектора $\overline{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{a},\ \cos\beta = \frac{y}{a},\ \cos\gamma = \frac{z}{a},\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$



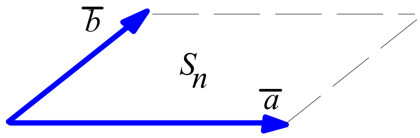
Угол φ меду векторами ; проекция вектора: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$; $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|}$, $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$

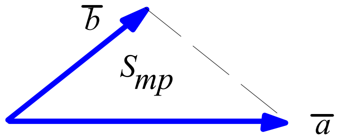




Площадь параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\bar{a}, \bar{b}$:

$$S_n = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|, \; S_{mp} = \frac{1}{2} \cdot \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$





Объем параллелепипеда и пирамиды, построенных на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$V_{пар} = \pm\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right), \; V_{пир} = \pm\frac{1}{6} \cdot \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right).$$

Координаты середины C отрезка AB : $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Деление отрезка AB точкой C в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$: $x_C = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$ и т.д.

Центр масс C системы точек m_1, m_2 : $x_C = \dfrac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$ и т.д.

Момент $M_A(\bar{R}) = \overline{AM} \times \bar{R}$ силы $\bar{R}$, приложенной к точке M, относительно точки A.