Введение

Матричное исчисление – это раздел математики, изучающий свойства матриц, их применения для описания сложных объектов при помощи упорядоченного набора чисел.

Предметом изучения алгебры матриц являются такие операции над матрицами как сложение, умножение, транспонирование, нахождение обратной матрицы.

В настоящее время трудно представить себе сферу точного знания, в которой не использовалось бы понятие матрицы.

При изучении темы рекомендуется литература [1-3] и интернет ресурс [4]

Общие сведения

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$. Матрицы обычно обозначаются большими латинскими буквами A, B,...X, Y и т.п. и записываются в виде таблицы, заключенной слева и справа в круглые или квадратные скобки. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами. В информатике матрицы называются массивами. Например:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ (размер } 2 \times 2\text{)}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ (размер } 2 \times 3\text{)}.$$

Заметим, что квадратные скобки удобны для записи больших матриц.

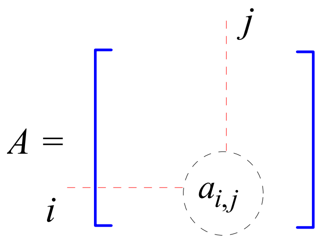
Матрица называется квадратной порядка n, если число ее строк равно числу n ее столбцов, т.е. $m = n$. Такова, например, матрица A порядка 2.

Матрицы, состоящие из одной строки или столбца, называются векторами.

Вектора можно помечать, как обычно, чертой или считать, что это матрица.

Строки матрицы нумеруются сверху вниз, а столбцы - слева направо, начиная с единицы. В информатике нумерация возможна с нуля или с отрицательных целых чисел.

Обозначим через $a_{i,j}$ число, называемое элементом матрицы A, расположенное на пересечении строки с номером i и столбца j. Сказанное поясним можно пояснить графически так:



Индексы (номера) i , j определяют позицию элемента $a_{i,j}$ в матрице.

Запишем матрицу A в канонической форме:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Другая краткая форма записи матрица $A = \left(a_{i,j}\right)$.

Обозначим столбцы матрицы $A=\left(a_{i,j}\right)$ как векторы $\overline{a_j}=\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}$ при $j=1,2,\ldots,n$. Тогда матрицу A можно записать как последовательность этих столбцов (или матрицу, составленную из столбцов):

$$A=\left(\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_j},\ldots,\overline{a_n}\right).$$

Двойственная точка зрения: матрица как таблица своих векторов-строк $\overline{S_i}=\left(a_{i,1},a_{i,2},\ldots,a_{i,n}\right)$:

$$A=\begin{bmatrix} \overline{S_1} \\ \overline{S_2} \\ \vdots \\ \overline{S_i} \\ \vdots \\ \overline{S_m} \end{bmatrix}$$

Две матрицы $A=\left(a_{i,j}\right)$, $B=\left(b_{i,j}\right)$ называются равными, если равны все их элементы в одинаковых позициях, т.е. $a_{i,j}=b_{i,j}$ при всех допустимых значениях индексов i, j. Равенство матриц запишется : $A=B$.

Матрица, получаемая из матрицы $A=\left(a_{i,j}\right)$ поворотом на 180^0 вокруг главной диагонали, обозначается A^T и называется транспонированной матрицей. При транспонировании матрицы ее столбцы следует переписать в виде строк или наоборот - строк в виде столбцов

Например, $A=\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 2 \\ z & 3 \end{bmatrix}$

Числа $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$, ... $a_{n,n}$ называются диагональными элементами квадратной матрицы, а прямая, проходящая через них - главной диагональю матрицы. Сумма диагональных элементов называется следом матрицы и обозначается $tr(A)=a_{1,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{n,n}$

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне диагонали, равны нулю, называется диагональной матрицей. Такая матрица записывается $diag\left(a_{1,1},a_{2,2},\ldots,a_{n,n}\right)$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной и обозначается символом E.

Для задания единичной матрицы можно воспользоваться символом Кронекера $\delta_{i,j}=\begin{cases}0\ ,\ если\ i\neq j\\ 1\ ,\ если\ i=j\end{cases}$. Верно равенство $E=\left(\delta_{i,j}\right)$.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается 0 (не путать с числом) .

Действия над матрицами

Сумма матриц $A=\left(a_{i,j}\right)$, $B=\left(b_{i,j}\right)$ одного размера - это третья матрица того же размера, обозначаемая $A+B$, элементы которой получаются сложением всех элементов $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, расположенных в одинаковых позициях матриц. В частности, имеем равенство $A+B=\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)$.

Например, даны матрицы $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 3 & 7 & 0\end{bmatrix}$.

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 3 & 7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & 5 & -3\\ 4 & 9 & -4\end{bmatrix}.$$

Произведение скаляра (числа) λ на матрицу $A=\left(a_{i,j}\right)$ обозначается λA и получается умножением всех элементов $a_{i,j}$ матрицы на этот скаляр, т.е. $\lambda A=\left(\lambda a_{i,j}\right)$. Например, разность матриц $A-B$ можно выразить через сумму матриц так: $A-B=A+(-1)B$.

Матрица называется скалярной, если она имеет вид $\lambda E=\left(\lambda\delta_{i,j}\right)$.

Произведение двух матриц $A=\left(a_{i,j}\right)$, $B=\left(b_{i,j}\right)$ обозначается AB . Оно выполняется так: все строки $\overline{a_i}$ первой матрицы A умножаются скалярно на все вектора-столбцы $\overline{b_j}$ второй матрицы B. Число, равное этому скалярному произведению $\overline{a_i}\cdot\overline{b_j}$, запишем на пересечении строки с номером i и столбца j. Итак, произведение равно $AB = \left(\overline{a_i} \cdot \overline{b_j}\right) = \left(\sum_k a_{i,k} b_{k,j}\right)$

Например, вычислим:

1) произведение строки и столбца, $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \cdot a + 5 \cdot b$;

2) произведение матрицы и столбца,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 2 + b \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot a + 5 \cdot b \\ 26 \end{bmatrix};$$

3) произведение двух матриц, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Заметим, что строка $(6; 0; -2)$ получается, если мы скалярно множим первую строку $(2; 0)$ первой матрицы на столбцы второй матрицы. Затем аналогично поступаем со второй строкой первой матрицы.

Произведение матриц AB существует только в случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Например, если матрицы A, B имеют размеры соответственно $m \times n$ и $n \times k$, то их произведение имеет размер $m \times k$.

Произведение матриц не обладает свойством перестановочности, т.е. в общем случае равенство $AB = BA$ не верно.

Множество квадратных матриц

Степень квадратной матрицы A обозначается A^n. Например, A^3 равно произведению $A^3 = AAA$.

Приведенные операции с матрицами обладают обычными свойствами, которые позволяют пользоваться привычными навыками преобразований числовых выражений. Например, $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $x \cdot (A + B) = x \cdot A + x \cdot B$ и т.п.

Подобная аналогия верна (кроме свойства $AB = BA$) и для произведения матриц.

Например,

1) $(AB)C = A(BC)$, т.е. результат умножения не зависит от способа расстановки скобок.
2) $A(B+C) = AB + AC$; 3) $AE = EA = A$, где E единичная матрица.
Свойства транспонирования:1) $(A+B)^T = A^T + B^T$; 2) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Множество всех квадратных матриц порядка n обозначается M_n. Оно замкнуто относительно сложения и умножения матриц, а также умножения их на число.

Определитель квадратной матрицы

Определитель— одно из основных понятий линейной алгебры.

Для любой квадратной матрицы порядка n можно соотнести число, обозначаемое $\det A$ или $|A|$ и называемое определителем (детерминантом) матрицы.

Определитель матрицы является многочленом от элементов квадратной матрицы.

Определитель второго порядка обозначается и вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot c - b \cdot d$$

Основная формула, по которой вычисляется определитель - это формула разложения по первой строке.

Определитель третьего порядка обозначается и вычисляется разложением по первой строке

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & s \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ v & s \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} x & z \\ y & s \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ y & v \end{vmatrix}$$

В этой формуле определители 2-го порядка называются минорами элементов a,b,c. Например, минор $\begin{vmatrix} y & z \\ v & s \end{vmatrix}$ элемента a получается из определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых записан элемент a.

Определитель можно вычислить разложение по любой строке и ли столбцу. При этом знаки миноров чередуются и берутся из таблицы знаков $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Понятие определителя матрицы является естественным обобщением определителей 2-го и 3-го порядков на произвольный порядок. При вычислении применяем формулу разложения по строке или столбцу.

Например, вычислим определитель 4-го порядка разложением по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

Раскрываем оба определителя по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6; \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta = 2\cdot(-6) - 3\cdot(-4) = 0.$$

Заметим, что этот же определитель удобней вычислять разложением по последней строке, в которой много нулей, т.е. при вычислении понадобится только один минор.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю. Для вырожденной матрицы $|A| = 0$.

Основные свойства определителей

1)При перестановке строк определитель меняет знак.

Например: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

2)Общий множитель чисел строки можно выносить за знак определителя.

Например: $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

3)При транспонировании определитель не меняется, т.е. $|A^T| = |A|$

Например: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{vmatrix}$

4)При вычитании из одной строки другой строки, умноженной на константу, определитель не изменится.

Например, из 1-ой строки S_1 вычитаем вторую строка S_2, умноженную на произвольное число k:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2\cdot k & 3-2\cdot k \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

5)Определитель произведения матриц $|AB| = |A| \cdot |B|$

Обратная матрица

Квадратная матрица B называется обратной для квадратной матрицы A, если верны равенства $AB = BA = E$, где E единичная матрица.

Достаточно потребовать выполнения одного из равенств, например, $AB = E$

Теорема. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Докажем единственность обратной матрицы. Допустим, C - вторая обратная матрица для матрицы A. Докажем, что $B = C$.

Вычислим произведение BAC двумя способами:

1) $BAC=(BA)C=EC=C$; 2) $BAC=B(AC)=BE=B$.

Отсюда вытекает требуемое равенство $B=C$.

Обратная матрица обозначается A^{-1}. Для нее верны равенства $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Теорема. Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица A не вырождена, т.е. ее определитель не равен нулю.

Минором $M_{i,j}$ элемента $a_{i,j}$ матрицы $A=\left(a_{i,j}\right)$ называется определитель, получаемый из матрицы вычеркиванием строки i и столбца j, на пересечении которых записан этот элемент.

Алгебраическое дополнение элемента $a_{i,j}$ обозначается $A_{i,j}$ и оно с точностью до знака совпадает с минором $M_{i,j}$, а именно: $A_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$

Матрицу миноров $M=\left(M_{i,j}\right)$ легко преобразовать в матрицу $\left(A_{i,j}\right)$ алгебраических дополнений. Для этого меняем у элементов матрицы $M=\left(M_{i,j}\right)$ знаки на противоположные по принципу чередования черных и белых клеток шахматной доски. Диагональные элементы сохраняют свои знаки.

Транспонированная матрица, составленная из алгебраических дополнений $A_{i,j}$ матрицы A, называется союзной, и обозначается $A^{*}=\left(A_{i,j}\right)^{T}$.

Обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^{T}$.

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. Составим миноры $\left(M_{i,j}\right)$ для всех элементов $a_{i,j}$. Например, для строки $i=1$, столбца $j=1$ находим, что $M_{1,1}=2$. Вычисляем все миноры: $M_{1,1}=2$, $M_{1,2}=7$; $M_{2,1}=1$, $M_{2,2}=3$

Матрица миноров такова : $M=\left(M_{i,j}\right)=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Преобразуем ее в матрицу алгебраических дополнений. Для этого меняем знаки по принципу чередования черных и белых клеток шахматной доски.

Получаем: $\left(A_{i,j}\right)=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Союзная матрица $A^{*}=\left(A_{i,j}\right)^{T}=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы $\det A=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=6-7=-1$.

Вычислим обратную матрицу по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^{T}, \qquad A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Проверим правильность выкладок с помощью равенства $AA^{-1}=E$:
$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=E$$

Вывод. Матрицы $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ второго порядка имеет обратную матрицу, равную $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Решение. Запишем все миноры

$$M_{1,1}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{1,2}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{1,3}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{2,1}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{2,2}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_{2,3}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$M_{3,1}= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $M_{3,2}= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ $M_{3,3}= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Вычислим все миноры $M_{i,j}$. Их значения запишем в таблицу миноров

$$\left(M_{i,j}\right)= \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -6 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Преобразуем эту матрицу в матрицу алгебраических дополнений $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$

$$\left(A_{i,j}\right)= \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Транспонируем эту матрицу, чтобы получить союзную матрицу $A^* = \left(A_{i,j}\right)^T$

$$A^*= \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Формула обратной матрицы: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$, где $|A|$- определитель. Вычислим определитель матрицы

$$|A|= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

Обратная матрица: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

$$A^{-1}= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}= \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Проверка. $A^{-1}A = E$:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4*1+(-6)*0+(-3)*1 & 4*3+(-6)*1+(-3)*2 & 4*3+(-6)*2+(-3)*0 \\ (-2)*1+3*0+2*1 & (-2)*3+3*1+2*2 & (-2)*3+3*2+2*0 \\ 1*1+(-1)*0+(-1)*1 & 1*3+(-1)*1+(-1)*2 & 1*3+(-1)*2+(-1)*0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства обратных матриц

1. $AB = BA = E$, где E единичная матрица.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

4. Обратная матрица A^{-1} существует $\Leftrightarrow$ A не вырождена, т.е. $|A| \neq 0$

5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Виды матриц

В прикладных задачах широко используются такие матрицы как симметрические, ортогональные, положительно определенные, треугольные .

Матрица A называется симметрической, если верно равенство $A^T = A$, которое означает симметрию элементов матрицы относительно главной диагонали, т.е. верно $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Если же верно $A^T = -A$, то матрицу A называют кососимметрической, т.е. выполнено $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Например, из матриц $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ первая симметрическая матрица, а вторая- кососимметрическая.

У треугольной матрицы контур потенциально ненулевых ее элементов изображается треугольником (см. рис 1 а), а для трапециевидной - трапецией (см. рис 1 б).

Например: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ - треугольная матрица, а матрица $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$- трапециевидная.

Матрица называется ленточной, если у нее ненулевые элементы могут располагаться только на нескольких линиях, параллельных главной диагонали (см. рис. 1 в) . Например, для трех лент верно равенство $a_{i,j}=0$ при всех i, j таких, что $|i-j|\geq 2$.

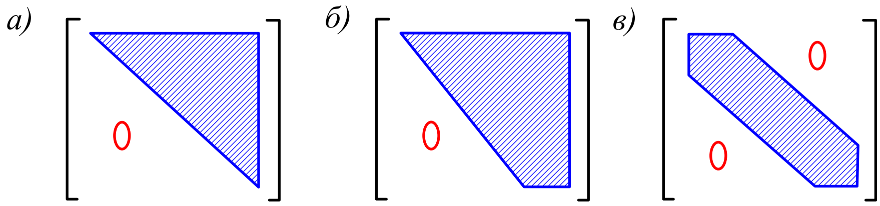


Рис. 1

Квадратная матрица называется ортогональной, если ее строки - попарно ортогональные единичные векторы. Заметим, что это свойство также верно для столбцов матрицы.

Признак ортогональности матрицы:

$$A \text{ ортогональна} \Leftrightarrow AA^T=E \quad \Leftrightarrow A^{-1}=A^T.$$

Свойства ортогональных матриц

1.Определитель ортогональной матрицы по абсолютной величине равен единице.

2.Для ортогональной матрицы A транспонирование равносильно нахождению обратной матрицы, $A^{-1}=A^T$. Обратная матрица A^{-1} также является ортогональной.

3.Произведение ортогональных матриц - ортогональная матрица.

Ранг матрицы. Метод окаймляющего минора

Составим определитель M из элементов прямоугольной матрицы $A=\left(a_{i,j}\right)$, взятых на пересечениях каких-то r строк и r столбцов, и назовем его минором порядка r. Например, можно взять минор M второго порядка в левом верхнем углу матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}. \text{ Итак, } M=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=-1.$$

Порядок этого минора можно увеличить, если к нему присоединить какую-нибудь строку и какой-нибудь столбец. При этом мы говорим, что минор M окаймляем строкой и столбцом.

Рангом матрицы A называется максимальный порядок r ненулевого минора M матрицы, т.е. любой минор порядка $r+1$ и выше равен нулю.

Ранг матрицы обозначается $r=r(A)$, минор M называется базисным или ранговым.

Согласно теории минор будет базисным, если все его окаймляющие миноры равны нулю.

Ранг не превосходит числа m строк и числа n столбцов матрицы, т.е. верно неравенство $r(A)\le\min(m,n)$. Нижняя оценка k для ранга возникает, если можно указать хотя бы один ненулевой минор порядка k, т.е. верно неравенство $r(A)\ge k$.

Вычислим ранг матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Верно $r(A) \geq 2$, так как минор $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$ не равен нулю; однако ранг не превосходит 3 - числа строк матрицы, $r(A) \leq 3$.

Перечислим все окаймляющие миноры для приведенной выше матрицы. Заметим, что третья строка -единственно возможный вариант для окаймления минора M. Для столбцов имеется два варианта - третий и четвертый столбцы. Получаем миноры 3-его порядка:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что эти миноры равны нулю (например, если заметить, что третья строка равна сумме первых двух).

Следовательно, ранг матрицы равен порядку минора M, т.е. $r = r(A) = 2$.

Изложенный способ нахождения ранга матрицы называется методом окаймляющего минора.

Векторы (столбцы) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_j}, \ldots, \overline{a_n}$ размерности n образуют базис, если ранг матрицы $A = \left(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_j}, \ldots, \overline{a_n}\right)$ равен n, т.е. определитель этой матрицы не равен нулю.

Свойства ранга матрицы

1. Ранг матрицы не зависит от выбора базисного минора, т.е. все базисные миноры матрицы имеют одинаковый порядок.

2. Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы . аналогичное утверждение верно и для столбцов.

3. Ранг матрицы не изменится . если в ней переставить местами строки или столбцы.

4. Ранг матрицы не изменится . если в ней удалить одну из строк, которая линейно выражается через другие. Например, из двух равных или пропорциональных строк можно удалить.

5. Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей (неравенства Сильвестра): $r(AB) \le r(A)$, $r(AB) \le r(B)$.

6. При умножении матрицы A на обратимую матрицу B ее ранг не меняется, т.е. $r(AB) = r(A)$, $r(AB) = r(B)$.

Матричная форма записи системы линейных уравнений (СЛУ)

Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + a_{1,3} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + a_{2,3} \cdot x_3 = b_2 \end{cases}.$$

Составим матрицу системы из коэффициентов $a_{i,j}$ при неизвестных x_j :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Обозначим $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ вектор-решение и $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ = столбец свободных коэффициентов системы линейных уравнений. Систему запишем в матричной форме $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Другая краткая форма записи такова: $AX = B$. Очевидно, что матричное уравнение $AX = B$ определяет в общем случае произвольную систему линейных уравнений, состоящую из m уравнений с n неизвестными.

Матрица R, получаемая присоединением к матрице A столбца свободных коэффициентов B, называется расширенной матрицей системы и обозначается условно так: $R = [A \mid B]$.

Система уравнений $AX = 0$ с нулевой правой частью $B = 0$ называется однородной системой линейных уравнений. Если же $B \neq 0$, то система неоднородная.

Решением системы линейных уравнений $AX = B$ называется вектор-столбец X, обращающий это равенство в тождество.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, а в противном случае - несовместной. Если совместная система имеет единственное решение, то она называется определенной, а в случае бесконечного множества решений - неопределенной.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда равны ранги расширенной матрицы R и матрицы системы A. Итак: $AX = B$ совместна $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(R)$.

Решение системы линейных уравнений с невырожденной матрицей. Формулы Крамера

Формулы Крамера применяются для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными.

Поясним на примерах. Дана система

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ системы составляется из коэффициентов $a_{i,j}$ при неизвестных x_j :

Вспомогательные определители Δ_1, Δ_2 получаются из Δ заменой первого столбца на столбец свободных коэффициентов, затем второго столбца и так далее.

Теорема. Если матрица системы не вырождена, т.е. $\Delta \neq 0$, то решение системы единственно и находится с помощью формул Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$

Если же все определители Δ и Δ_k равны нулю, то система совместна и имеет бесконечно много решений. В частности, одно из уравнений является следствием остальных уравнений системы. Его можно исключить.

Если же $\Delta = 0$, но хотя бы один определитель $\Delta_k \neq 0$, то система не совместна.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 7x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1$

Система совместна, так как $\Delta \neq 0$

Вспомогательные определители получаются из Δ заменой столбца на столбец свободных коэффициентов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 21 = 3$$

Формулы Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-2}{-1} = 2$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{3}{-1} = -3$

Проверка. Подставим найденные значения в уравнения системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 7x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2 + (-3) = 3 \\ 7 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 8 \end{cases}$$

Получаются верные равенства.

Ответ. $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Пример. Решить систему методом Крамера $\begin{cases} x+2y+3z=-5 \\ 3x+5y=2 \\ 4z+2y+x=-7 \end{cases}$

Переставим местами переменные в уравнениях системы

$$\begin{cases} x+2y+3z=-5 \\ 3x+5y=2 \\ 4z+2y+x=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=-5 \\ 3x+5y=2 \\ x+2y+4z=-7 \end{cases}$$

Вычислим определитель системы линейных уравнений

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}= 1\cdot 20-2\cdot 12+3\cdot(6-5)=-1$$

Находим вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Например, Δ_1 получается из определителя системы Δ заменой первого столбца на столбец свободных коэффициентов $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Второй определитель Δ_2 получается из определителя системы Δ заменой второго столбца на столбец свободных коэффициентов и аналогично Δ_3.

Находим

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -7 & 2 & 4 \end{vmatrix}=(-5)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}=-1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}-(-5)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}= 1$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+(-5)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}= 2,$$

Применим формулы Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1\ ;\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{-1}=-1\ ;\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{2}{-1}=-2$$

Подставим найденные значения в уравнения системы. Получаются верные равенства.

Ответ: $x=1$, $y=-1$, $z=-2$

Матричный способ решения систем линейных уравнений.

Теорема. Система линейных уравнений $AX=B$ с квадратной невырожденной матрицей A имеет единственное решение, определяемое формулой $X=A^{-1}B$.

Доказательство. Помножим слева обе части уравнения $AX=B$ на обратную матрицу A^{-1}. Получаем:

$$AX=B \iff A^{-1}AX=A^{-1}B,\ (A^{-1}A)X=A^{-1}B,\ EX=A^{-1}B,\ X=A^{-1}B.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2=3 \\ 7x_1+2x_2=8 \end{cases}$$

Решение. Матрица системы $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, вектор-решение $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, столбец свободных коэффициентов $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$. Матричная форма записи системы линейных уравнений такова: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ или $AX=B$. Решаем ее с помощью обратной матрицы, получаем решение $X=A^{-1}B$. Ранее мы нашли, что $A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$.

Можно применить формулу: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Поэтому

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=A^{-1}B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6+8 \\ 21-24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ответ. $x_1=2$, $x_2=-3$.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+3y+3z=4 \\ \quad y+2z=2 \\ \quad x+2y=1 \end{cases}$$

Решение. Матрица системы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ранее найдена обратная матрица

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Вектор-решение

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

находим по формуле $X=A^{-1}B$:

$$X=\begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4*4+(-6)*2+(-3)*1 \\ (-2)*4+3*2+2*1 \\ 1*4+(-1)*2+(-1)*1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Элементарные преобразования матриц

При решении задач линейной алгебры,например, при решении системы линейных уравнений или при вычислении определителей в целях оптимизации вычислительного процесса необходим применять к строкам или столбцам матрицы элементарные преобразования.

Перечислим виды элементарных преобразований.

1)К одной строке матрицы прибавить другую строку матрицы, умноженную на некоторое число.

2)Строку матрицы помножить на ненулевое число.

3)Поменять местами две строки.

Подобные действия можно определить также для столбцов матрицы.

Замечание 1. Обычно элементарные преобразования производят так, чтобы под главной диагональю матрицы получились нули.

Замечание 2. Первые два вида элементарных преобразований не меняют значения определителя; а третье меняет его знак.

Пример. Вычислить определить с помощью метода элементарных преобразований (накоплением нулей под главной диагональю).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 31 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix}$$

Решение. Приведем определитель к треугольному виду, т.е. получим нули под главной диагональю. В первую очередь получим нуль в обведенной позиции первого столбца. Вычитаем из второй строки S_2 определителя, первую строку S_1, помноженную на 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 31 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix} \overset{S_2-5\cdot S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix}$$

Вычитаем из третьей строки S_3 первую строку S_1, помноженную на 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix} \overset{S_3-3S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -9 \end{vmatrix} \overset{S_3+2S_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Определитель треугольной формы равен произведению диагональных элементов, т.е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 31 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 3 = -6.$$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Известный метод исключения переменных применительно к системе линейных уравнений $AX = B$ допускает четкое оформление с помощью аппарата матриц и в этом матричном виде он называется методом Гаусса.

Охарактеризуем те преобразования уравнений системы . которые позволяют перейти к новой равносильной системе уравнений:

1) можно переставить местами два уравнения системы;

2) прибавить к обеим частям одного уравнения обе части другое уравнения, помноженные на некоторое не нулевое число.

Система получается равносильной исходной потому, что эти же преобразования можно выполнить в обратном порядке и вернуться к исходной системе.

Перепишем систему в виде расширенной матрицы $R = [A \mid B]$.

Названные элементарные преобразования удобно производить единообразно не с уравнениями, а со строками расширенной матрицы системы $R = [A \mid B]$, которая получается из матрицы системы A, если к ней справа приписать .B-столбец свободных коэффициентов системы.

Элементарные преобразования строк этой матрицы будут соответствовать преобразованиям уравнений системы.

Метод разбивается на два этапа: прямой и обратный ход.

Прямой ход. Приводим расширенную матрицу $R = [A \mid B]$ к треугольному виду, т.е. получим нули под главной диагональю матрицы.

Заметим, что нулевые строки матрицы R соответствуют истинному равенству $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n = 0$, т.е. $0=0$. Поэтому эти строки можно вычеркнуть из расширенной матрицы R.

Если же в матрице R найдется строка вида $(0;0;0;\ldots 0;a)$ с ненулевым числом a, то эта строка соответствует противоречивому уравнению $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n = a$. Поэтому в этом случае система уравнений не совместна.

Обратный ход метода Гаусса. Запишем систему линейных уравнений соответствующую треугольной матрице.

В этой матрице можно указать базисный минор(обычно его диагональ совпадает с диагональю преобразованной расширенной матрицы. Объявим свободными все переменные, номера которых не входят в список номеров столбцов этого минора. Это значит, что свободные переменные могут принимать независимо друг от друга произвольные значения. Связанные переменные (соответствующие столбцам базисного минора) выразим через свободные переменные. Заметим, что переменные будем исключать, начиная с последнего уравнения .

Пример. Решить систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 8x_2 + 31x_3 = 30 \\ 3x_1 + 10x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 31 & 30 \\ 3 & 10 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса. Приведем эту матрицу с помощью элементарных преобразований к треугольному виду, чтобы под главной диагональю получились нули. Заметим, что этот пример как бы продолжает предыдущий пример., т.е. мы выполняем те же элементарные преобразования и фактически нам следует проделать все вычисления с числами в последнем столбце..

Вычитаем из второй строки S_2 определителя, первую строку S_1, помноженную на 5.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 31 & 30 \\ 3 & 10 & 6 & -5 \end{bmatrix} \overset{S_2 - 5S_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Вычитаем из третьей строки S_3 первую строку S_1, помноженную на 3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & -5 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 3S_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \\ 0 & 4 & -9 & -17 \end{bmatrix}$$

Сократим вторую строку на 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \\ 0 & 4 & -9 & -17 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -9 & -17 \end{bmatrix}.$$

Далее к третьей строке добавим вторую, помноженную на 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -9 & -17 \end{bmatrix} \overset{S_3 + 4S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Обратный ход метода Гаусса. Запишем систему линейных уравнений соответствующую треугольной матрице.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ (-1)x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Исключаем неизвестные, начиная с последнего уравнения $3x_3 = 3$. Отсюда: $x_3 = 1$. Выразим неизвестную x_2 из второго уравнения: $(-1)x_2 + 3x_3 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 3x_3 - 5$

Подставим значение $x_3 = 1$, т.е. $x_2 = 3x_3 - 5 = -2$.

Аналогично находим x_1 из первого уравнения :

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 4 - (2x_2 + 5x_3) = 4 - (2(-2) + 5) = 3.$$

Следовательно, имеем: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Ответ. $(3; -2; 1)$.

Пример. Решить систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 8x_2 + 31x_3 = 30 \\ 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 31 & 30 \\ 3 & 10 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса. Приведем эту матрицу с помощью элементарных преобразований к треугольному виду, чтобы под главной диагональю получились нули. Заметим, что матрица R отличается от подобной матрицы из предыдущего примера только в одной позиции (число обведено), т.е. первые элементарные преобразования второй строки дают тот же результат, что в предыдущем примере:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 31 & 30 \\ 3 & 10 & 3 & -5 \end{bmatrix} \overset{S_2 - 5S_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 3 & -5 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 3S_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \\ 0 & 4 & -12 & -17 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}S_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -12 & -17 \end{bmatrix}. \overset{S_3 + 4S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Обратный ход метода Гаусса. Запишем систему линейных уравнений соответствующую треугольной матрице.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ (-1)x_2 + 3x_3 = 5 \\ 0x_3 = 3 \end{cases}$$

Заметим, что система не совместна, т.е. не имеет решений, так как она содержит противоречивое уравнение $0\,x_3 = 3$, $0 = 3$.

Ответ. Система уравнений решений не имеет.

Пример. Исправим только один элемент в предыдущем примере (он обведен) и решим систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 8x_2 + 31x_3 = 30 \\ 3x_1 + 10x_2 + 3x_3 = -8 \end{cases}$$

Решение. Аналогичные выкладки приводят к треугольной матрице

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 31 & 30 \\ 3 & 10 & 3 & -8 \end{bmatrix} \overset{S_2 - 5S_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 3 & -8 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -12 & -20 \end{bmatrix} \overset{S_3 + 4S_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Заметим, что последняя нулевая строка может быть удалена из матрицы, так как она соответствует истинному равенству $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$, т.е. $0 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{удаляем } S_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Обратный ход метода Гаусса. Запишем систему линейных уравнений соответствующую треугольной матрице.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 = 4 \\ (-1)\,x_2 + 3\,x_3 = 5 \end{cases}$$

Принимаем переменную x_3 за свободную, т.е. она может принимать произвольные действительные значения, $-\infty < x_3 < +\infty$. Остальные переменные следует выразить через свободную переменную:

1) $(-1)\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 3x_3 - 5$;

2) $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \Leftrightarrow$ $x_1 = 4-(2x_2+5x_3) = x_1 = 4-(2x_2+5x_3)$,

$x_1 = 4-(2\cdot(3x_3-5)+5x_3) = 4-(6x_3-10+5x_3) = 14-11x_3$

Ответ. $x_1 = 14-11x_3$, $x_2 = 3x_3-5$, где переменная x_3 принимает произвольные действительные значения, $-\infty < x_3 < +\infty$.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Жордана - Гаусса.

Решить систему $AX = B$ методом Гаусса

Дано. Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\ 4\cdot x_1 + 9\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = -38 \\ x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 2\cdot x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$

Преобразования производим так, чтобы получить нули в столбце, кроме одной выделенной клетке . В этой клетке как заключительное действие, получим деление строки на число единицу. Метод Жордана - Гаусса обобщает метод Гаусса за счет объединения прямого и обратного хода.

x_1	x_2	x_3	x_4		Действия над строками
1	2	1	1	-7	
4	9	3	8	-38	S2-4*S1
1	1	3	-2	-3	S3-S1
1	1	3	-1	-6	S4-S1

Поясним. Вычитаем из строки s_2 с номером 2 строку s_1 с номером 1, умноженную на число $k = 4$ Подобные действия отмечаем в таблице

x_1	x_2	x_3	x_4		Действия над строками
1	2	1	1	-7	S1-2*S2
0	$\boxed{1}$	-1	4	-10	
0	-1	2	-3	4	S3+S2
0	-1	2	-2	1	S4+S2

x_1	x_2	x_3	x_4		Действия над строками
1	0	3	-7	13	S1-3*S3
0	1	-1	4	-10	S2+S3
0	0	$\boxed{1}$	1	-6	
0	0	1	2	-9	S4-S3

x_1	x_2	x_3	x_4		Действия над строками
1	0	0	-10	31	S1+10*S4
0	1	0	5	-16	S2-5*S4
0	0	1	1	-6	S3-S4
0	0	0	$\boxed{1}$	-3	

x_1	x_2	x_3	x_4		Действия над строками
1	0	0	0	1	
0	1	0	0	-1	
0	0	1	0	-3	
0	0	0	1	-3	

Получили решение $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$, $x_4 = -3$

Проверка. Подставим эти значения в уравнения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\ 4\cdot x_1 + 9\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = -38 \\ x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 2\cdot x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - x_4 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\cdot(-1) + (-3) + (-3) = -7 \\ 4\cdot 1 + 9\cdot(-1) + 3\cdot(-3) + 8\cdot(-3) = -38 \\ 1 + (-1) + 3\cdot(-3) - 2\cdot(-3) = -3 \\ 1 + (-1) + 3\cdot(-3) - (-3) = -6 \end{cases}$$

Получаются верные равенства. Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$, $x_4 = -3$

Решение систем линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

Если правые части линейных уравнений равны нулю, то такая система называется системой линейных однородных уравнений. Эта система совместна, так как у нее есть нулевое решение: все $x_k = 0$. Это решение единственно, если ранг системы равен числу переменных системы. В противном случае система имеет бесконечно много решений.

Множество решений системы линейных однородных уравнений замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр. Например, сумма решений снова является решением системы. Это множество с указанными операциями называется линейным пространством решений однородной системы . Базис пространства решений называется фундаментальная система решений. Размерность этого пространства L равна числу решений в этом базисе. В частности, $\dim L = n - r(A)$, где n - число переменных системы, а $r(A)$ - ранг матрицы системы.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x + 2y - z + 4u + w = 0 \\ x + 3y + z + 5u + 2w = 0 \\ 2x + 9y + 8z + 13u + 7w = 0 \end{cases}$

Указать базисные решения, фундаментальную систему решений и определить размерность пространства решений.

Решение. Составим матрицу системы, т.е. нулевые значения правых частей не пишем

x	y	z	u	w	Действия над строками
$\boxed{1}$	2	-1	4	1	
1	3	1	5	2	S2-S1
2	9	8	13	7	S3-2*S1

Получим нули в первом столбце за исключение отмеченной клетки, в которой делением получим единицу.

x	y	z	u	w	Действия над строками
1	2	-1	4	1	S1-2*S2
0	$\boxed{1}$	2	1	1	
0	5	10	5	5	S3-5*S2

x	y	z	u	w	Действия над строками
1	0	-5	2	-1	
0	1	2	1	1	
0	0	0	0	0	Удаляем строку

Удаляем нулевую строку

x	y	z	u	w	Действия над строками
1	0	-5	2	-1	
0	1	2	1	1	

Получаем систему уравнений $\begin{cases} x-5z+2u-w=0 \\ y+2z+u+w=0 \end{cases}$

Отсюда общее решение

$$\begin{cases} x-5z+2u-w=0 \\ y+2z+u+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5z-2u+w \\ y=-2z-u-w \end{cases}$$

Переменные z,u,w- свободные, т.е. эти переменные принимают произвольные значения независимо друг от друга.

Базисное решение – это частное решение, которое получается, если все свободные переменные, кроме одной, приравнять к нулю.

Фундаментальная система решений получается как максимальная совокупность линейно независимых частных решений . Например, положим $z = 1$, $u=0$, $w=0$. Получим первое решение фундаментальной системы решений обозначим X_1. Затем аналогично получим решения X_2, X_3

Можно представить фундаментальная система решений в виде таблицы

	x	y	z	u	w
X_1	5	-2	1	0	0
X_2	-2	-1	0	1	0
X_3	1	-1	0	0	1

Размерность пространства решений равна числу свободных переменных, т.е. равна 3.

Вычисление обратной матрицы с помощью метода элементарных преобразований

Без доказательства отметим, что любая невырожденная матрица преобразуется к единичной матрице с помощью элементарных преобразований строк.

Опишем метод нахождения обратной матрицы. Припишем справа к матрице A единичную матрицу E того же порядка. Новую матрицу обозначим так: $R=[A\,|\,E]$. Преобразуем эту матрицу с помощью элементарных преобразований строк так, чтобы на месте матрицы A получилась единичная матрица. Тогда справа на месте единичной матрицы будет записана обратная матрица A^{-1}. Итак, результат преобразований будет таким:

$$R=[A\,|\,E] \Rightarrow [E\,|\,A^{-1}].$$

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Решение. Составим матрицу $R=[A\,|\,E]$ в виде таблицы

1	3	3	1	0	0	
0	1	2	0	1	0	
1	2	0	0	0	1	S3-S1

Производим элементарные преобразования строк

1	3	3	1	0	0	S1-3*S2
0	1	2	0	1	0	
0	-1	-3	-1	0	1	S3+S2

1	0	-3	1	-3	0	S1-3*S3
0	1	2	0	1	0	S2+2*S3
0	0	-1	-1	1	1	

1	0	0	4	-6	-3
0	1	0	-2	3	2
0	0	1	1	-1	-1

Обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Вычисление ранга матрицы с помощью метода элементарных преобразований

Известно, что элементарные преобразования строк не меняют ранга. Поэтому матрицу следует привести к трапецивидному виду (т.е. нули под диагональю).

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

Решение. Применим элементарные преобразования строк

1	2	-1	4	
1	3	1	5	S2-S1
2	9	8	13	S3-2*S1

1	2	-1	4	S1-2*S2
0	1	2	1	
0	5	10	5	S3-5*S2

1	0	-5	2	
0	1	2	1	
0	0	0	0	

Удаляем нулевую строку, от этого ранг не меняется

1	0	-5	2	
0	1	2	1	

Число ненулевых строк в трапецивидной матрице (нули под диагональю) равно 2, т.е. ранг $r(A)=2$

Например, укажем базисный минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Собственные значения матрицы

Пусть $A=\left(a_{i,j}\right)$ - квадратная матрица порядка n. Составим определитель $|A-\lambda E|$. Он получается, если по диагонали матрицы вычесть переменную λ. Определитель $|A-\lambda E|$ конструируется из чисел и переменной λ при помощи трех арифметических операций (кроме деления), поэтому как функция он является многочленом.

Многочлен $|A-\lambda E|$ степени n, уравнение $|A-\lambda E|=0$ называется характеристическими, а их корни - собственными значениями матрицы A.

Пример 1. Найти собственные значения матрицы $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Составим определитель $|A-\lambda E|=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}$.

Решим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$:

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}=0$, $(3-\lambda)(-\lambda)-10=0$, $-3\lambda+\lambda^2-10=0$,

Получим собственные значения матрицы A:

$\lambda^2-3\lambda-10=0$, $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=5$.

Ненулевой вектор $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ называется собственным для матрицы A порядка n, если верно равенство $AX = \lambda X$. Докажем, что число λ будет собственным значением матрицы.

Составим и преобразуем систему линейных уравнений

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \; AX = \lambda EX, \; AX - \lambda EX = 0, \; (A - \lambda E)X = 0.$$

Получили однородную систему линейных уравнений $(A - \lambda E)X = 0$, у которой имеется по крайней мере два решения- нулевой вектор и собственный вектор X. Поэтому определитель системы равен нулю, т.е. $|A - \lambda E| = 0$, а число λ- корень этого уравнения. Следовательно, λ- собственное значение матрицы.

Пример. Найти собственные вектора матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Составим однородную систему уравнений $(A - \lambda E)X = 0$, определяющую собственный вектор при заданном собственном значении:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Случай 1, $\lambda = -2$. Подставим это значение в систему уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \; x_1 + x_2 = 0.$$

Второе уравнение системы есть следствие первого, поэтому его можно удалить из системы. Одну из переменных примем, равной 1, например, $x_1 = 1$, а вторую выразим из уравнения $x_1 + x_2 = 0$, т.е. $x_2 = -1$. Собственный вектор $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Случай 2, $\lambda = 5$. Подставим это значение в систему уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2x_1 + 5x_2 = 0.$$

Примем $x_1 = 2$, тогда из уравнения $-2x_1 + 5x_2 = 0$ получаем $x_2 = 5$.

Второй собственный вектор равен $X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Свойства собственных значений и векторов

1.Матрица A порядка n имеет n собственных корней и векторов (возможно комплексных).

2.Определитель $|A|$ матрицы равен произведению всех ее собственных значений, т.е. $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

3.След $tr(A)$ матрицы по определению равен сумме диагональных элементов. С другой стороны след равен сумме всех собственных значений матрицы, т.е. $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

4.Собственные векторы для различных собственных значений линейно независимы, а для симметрической матрицы, более того, попарно ортогональны, те. Их скалярное произведение равно нулю.

5.Собственные векторы симметрической матрицы действительны.

Типовые примеры по теме «Матрицы»

1

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $C = 2A + B$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$

2

Даны матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$. Какое выражение не имеет смысла?

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$A+B$	AB	B^TC	AC

3

Найти произведение матриц AB, если $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\ 5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$

4

Найти произведение матриц AB, если $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\begin{bmatrix}6 & 8\\ 8 & 8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6 & 8\\ 9 & 8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6 & 8\\ 9 & -8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6 & 7\\ 9 & 8\end{bmatrix}$

5

Найти значение $f(A)$ функции $f(x)=x^2-3x+2$, если $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 9 & 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6 & 6\\ -9 & 7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-6 & 6\\ -9 & 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-6 & 6\\ -8 & 7\end{bmatrix}$

6

При каком значении x ранг матрицы $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 2 & x\end{bmatrix}$ равен двум?

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
-8	0,5	2	16

7

Указать, чему равна сумма $x+y$, если (x,y) решение системы $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
3	1	0	2

8

Какая матрица не вырождена?

Ответ 1	**Ответ 2**	**Ответ 3**	**Ответ 4**
$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9

Вычислить обратную матрицу A^{-1}, если $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ответ. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Библиографический список

1. Письменный Л. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Л. Т. Письменный. – Москва : Айрис Пресс, 2006. – 608 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии-М: Наука,1984.

3. Щипачев, В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Щипачев.– М. : Высш. шк., 2001.– 304 с.

4. В.П.Белкин. Персональный сайт. http://bvp1234.ucoz.ru

Список дополнительной литературы

1. Щипачев, В.С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Щипачев.– М. : Высш. шк., 1998.– 479 с.

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1 / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.– М. : Высш. шк., 1999.– 304 с.

3. Ильин В.А., Позднияк Э.Г. Линейная алгебра.-М.Наука,1983.

4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов.М.:Наука,1981.

Учебное издание

Составитель
Белкин Валерий Павлович

Матрицы

Методические указания для практических занятий

Напечатано в полном соответствии с авторским оригиналом

Подписано в печать хх.хх.2014г.
Формат бумаги 60х84 1/16. Бумага писчая. Печать офсетная.
Усл.-печ. 0,64 л.. Уч.-изд. 0,71. л. Тираж 5 экз. Заказ .

Сибирский государственный индустриальный университет
654007, г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42.
Типография СибГИУ